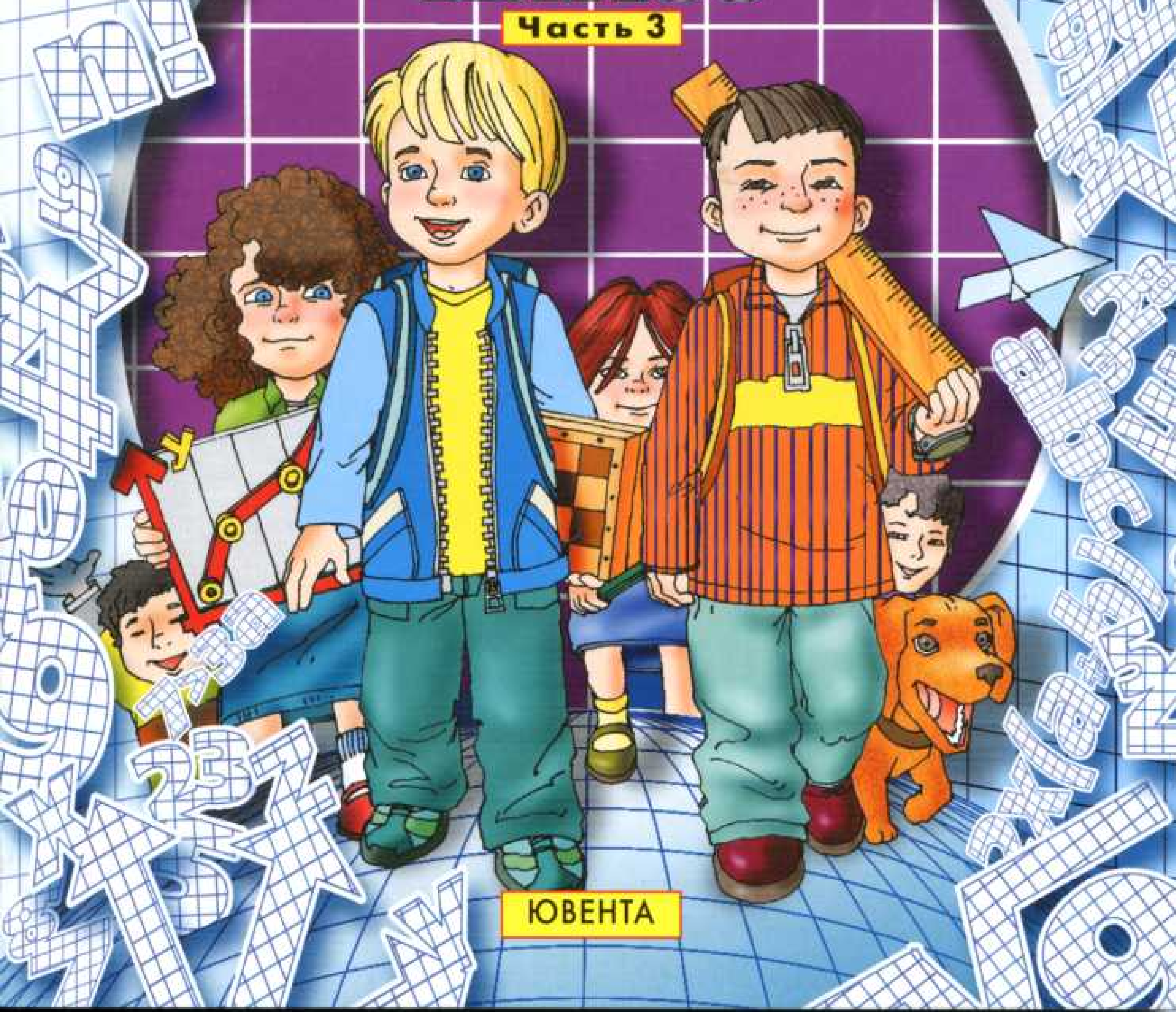
Г.В.Дорофеев, Л.Г.Петерсон

МАТЕМАТИКА

6 класс

Часть 3



ЮВЕНТА

УДК 373
ББК 22.1я721
Д 69

Ассоциация «Школа 2000...»
Центр системно-деятельностной педагогики «Школа 2000...» АПК и ППРО РФ

Программа математического развития 0–6
«УЧУСЬ УЧИТЬСЯ»

Научный руководитель
доктор педагогических наук ***Л. Г. Петерсон***

Допущено Министерством образования и науки РФ

Дорофеев Г. В., Петерсон Л. Г.
Д 69 Математика. 6 класс. Часть 3. — Изд. 2-е, перераб. / Г. В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон. — М.: Издательство «Ювента», 2010. — 176 с.: ил.

ISBN 978-5-85429-305-1 (4-й завод)

Учебник ориентирован на развитие мышления и творческих способностей учащихся, формирование у них системы прочных математических знаний, общеучебных умений, готовности к саморазвитию.

Является составной частью непрерывного курса математики «Учусь учиться» для дошкольников, начальной и средней школы, который соответствует новым образовательным стандартам второго поколения (2009).

Реализует образовательную систему деятельностного метода обучения «Школа 2000...» (Премия Президента РФ в области образования за 2002 год).

Открытый УМК «Школа 2000...» включает в себя непрерывный курс математики «Учусь учиться» и любые учебники Федеральных перечней по другим учебным предметам на основе деятельностного метода обучения. Может использоваться во всех типах школ.

Рекомендуется использование учебного пособия «Построй свою математику», 6 класс (эталоны – правила, формулы, алгоритмы, способы действий учащихся по всем темам данного учебника).

УДК 373:51
ББК 22.1я721

Курсовую подготовку учителей

к реализации **деятельностного метода обучения** осуществляет
Центр системно-деятельностной педагогики «Школа 2000...» АПК и ППРО РФ
125212, Москва, Головинское шоссе, д.8, корп. 2

Тел./факс: (495) 797–89–77, 452–22–33

E-mail: info@sch2000.ru **Интернет:** www.sch2000.ru

ISBN 978-5-85429-305-1 (4-й завод)

Г.В. Дорофеев, Л.Г. Петерсон

МАТЕМАТИКА

Учебник для 6 класса
Часть 3

ЮВЕНТА
2010

Оглавление

Глава 3. Рациональные числа

Глава 4. Геометрия

В книге используются условные обозначения:

К – задачи по новой теме для работы в классе,


Д – задачи для домашней работы,

П – повторение ранее пройденного,


С – задачи на смекалку.

Глава 3
Рациональные числа

§ 3. Уравнения

1. Раскрытие скобок.

С помощью свойств арифметических действий можно выполнять различные преобразования выражений с рациональными числами: перестановку слагаемых, раскрытие скобок и т.д. Понятие отрицательных чисел позволяет получить общее правило раскрытия скобок, упрощающее вычисления и преобразования выражений.

Для вывода этого правила рассмотрим выражения:

$$a + (b + c) \qquad \text{и} \qquad a - (b + c).$$

Они отличаются только знаками, стоящими перед скобками. На основании правил прибавления суммы к числу и вычитания суммы из числа имеем:

$$a + (b + c) = a + b + c \quad \text{и} \quad a - (b + c) = a - b - c.$$

Сравнивая полученные выражения, мы видим, что знак «+» перед скобками не меняет знаков слагаемых в скобках, а знак «−» меняет их на противоположные. Таким образом, приходим к следующим правилам раскрытия скобок:

Если перед скобками стоит знак «+», то при раскрытии скобок знаки слагаемых в скобках сохраняются.
Если перед скобками стоит знак «−», то при раскрытии скобок знаки слагаемых в скобках заменяются на противоположные.

Например,

$$3x + (-y + 5) = 3x - y + 5, \qquad 3x - (-y + 5) = 3x + y - 5.$$

Для раскрытия скобок в выражениях, содержащих умножение числа на сумму, используется распределительное свойство умножения:

$$a(b + c) = ab + ac.$$

По правилам умножения рациональных чисел, если $a > 0$, то знаки слагаемых b и c не изменятся, а если $a < 0$, то изменятся на противоположные. Например:

$$5(-n + y) = -5n + 5y \qquad \text{и} \qquad -5(-n + y) = 5n - 5y.$$

Таким образом, при умножении суммы на число можно применять те же самые правила раскрытия скобок.

Рассмотрим несколько примеров.

П р и м е р 1.
Раскрыть скобки в выражении $a - (-b + c) + (d - k - m)$.

Р е ш е н и е:
$a - (-b + c) + (d - k - m) = a + b - c + d - k - m.$

П р и м е р 2.
Найти значение выражения $(-8 + 35) - (-15 + 13) + (-5 + 19)$.

Р е ш е н и е:
Раскроем скобки в данном выражении и вычислим значение полученной алгебраической суммы:

$(-8 + 35) - (-15 + 13) + (-5 + 19) = -8 + 35 + 15 - 13 - 5 + 19 = 43.$

1) $35 + 15 + 19 = 69$;
2) $8 + 13 + 5 = 26$;
3) $69 - 26 = 43$.

П р и м е р 3.
Раскрыть скобки и упростить выражение $-3(a - b) - 5\,(a + b)$.

Р е ш е н и е:
Раскроем скобки, а затем упростим полученное выражение:
$-3(a - b) - 5\,(a + b) = -3a + 3b - 5a - 5b = (-3 - 5)a + (3 - 5)b = -8a - 2b.$

К **1** Запиши на математическом языке:
а) правило прибавления суммы к числу;
б) правило вычитания суммы из числа;
в) распределительное свойство умножения.
Переведи полученные равенства на русский язык и проиллюстрируй с помощью графических моделей.

2 Раскрой скобки:

а) $-(a - b)$; г) $d - (-k + t)$; ж) $c - (b + c - a) + (-a + b)$;
б) $-(c + d)$; д) $-m + (a - c)$; з) $(d - m) - b - (-m + x + d) + x$;
в) $-(-x + y)$; е) $p - (-n + r - s)$; и) $k - (y - c) + (d - c - y) + (-k + d)$.

3 Раскрой скобки и найди значения выражений:

а) $-3{,}64 - (12{,}45 - 3{,}64)$; д) $45 - (-7 + 18) - (34 - 18 + 26)$;
б) $1\frac{3}{8} + \left(-2\frac{7}{9} + \frac{5}{8}\right)$; е) $-9{,}7 + (-3{,}8 + 5{,}2) - (2{,}9 - 5{,}2 - 9{,}7) + 3{,}8$;
в) $(5{,}6 - 7{,}2) - (-7{,}2 + 3{,}4)$; ж) $(1{,}8 - 6{,}03) - (-4{,}14 + 2{,}25 - 6{,}03) - 4{,}8$;
г) $\left(2{,}4 - \frac{2}{3}\right) + 2{,}4 - \left(1{,}8 + 1\frac{5}{6}\right)$; з) $-\left(5\frac{1}{3} - 4\frac{5}{16}\right) + 2\frac{1}{16} - \left(1\frac{2}{3} - 1\frac{5}{16} + 3\frac{11}{16}\right)$.

4 Упрости выражения:

а) $2{,}8 - (a - 1{,}4)$;
б) $-(-b + 3{,}2) + 0{,}7$;
в) $c - (1{,}6 + c)$;
г) $(-5{,}9 + d) - d$;
д) $(6{,}4 - x) - (5{,}8 + x)$;
е) $y - (4{,}3 + y) + 3{,}9$;
ж) $(-0{,}7 - m) - (-m + 0{,}5)$;
з) $-(1{,}2 - n) + (n - 0{,}8)$.

5 Реши уравнения:

а) $-4{,}3 - (-1{,}8 - x) = 3$;
б) $\left(n + 1\frac{2}{9}\right) - 4\frac{2}{9} = -4{,}8$;
в) $(c - 6) - (4{,}5 - c) = -1{,}5$;
г) $1\frac{5}{6} - \left(k - \frac{7}{12}\right) + 2\frac{1}{12} = 0{,}9$.

6 Переведи на математический язык и реши задачи:
а) В трех конкурсах приняли участие 80 человек. В первом конкурсе участвовало 28 человек, а во втором – на 6 человек меньше, чем в третьем. Сколько человек участвовало в третьем конкурсе?
б) Периметр треугольника равен 48,5 см. Одна его сторона равна 15,8 см, а вторая – на 1,9 см меньше, чем третья. Чему равна длина второй стороны?

7 Упрости выражения, используя распределительное свойство умножения:

а) $5(a + 2) - 12$;
б) $9 - 2(-c + 4)$;
в) $m - 3(2 - m) + 8$;
г) $2(m - n) - (m + n)$;
д) $(x - y) - 2(x + y)$;
е) $-2(a + b) + 2(a - b)$;
ж) $3(b - 1) - 2(b - 2)$;
з) $-2(d + 3) + 3(2 - d)$;
и) $5y - 2(y - 1) + 3(-y - 4)$.

8 Найди значение выражения. Есть ли в задаче лишние данные?

а) $3(x - 4) + 2(-x + 6)$, если $x = -1{,}8$;

б) $3b - 2(a - b) + a - 5(a + b)$, если $a = -0{,}5$, $b = \frac{1}{7}$.

9 Составь и упрости выражения:
а) К утроенной разности чисел m и n прибавить их удвоенную сумму.
б) Из удвоенной суммы чисел x и y вычесть разность утроенного числа x и числа y.

10 Составь выражение и найди его значение при данных значениях переменных:
а) Сначала поезд ехал 2 ч со скоростью v км/ч, потом он увеличил скорость на 10 км/ч и с этой скоростью проехал еще 3 ч. Затем поезд проехал 1 ч со скоростью на 5 км/ч меньшей, чем вначале. Сколько километров ему еще осталось проехать, если весь его путь составляет 625 км? (v = 70, 80, 90.)
б) Фермер отвез в первый магазин n мешков картофеля, а во второй – на 4 мешка больше, чем в первый. Сколько тонн картофеля у него еще осталось, если весь его урожай составил 3,2 т, а в каждом мешке по 50 кг? (n = 10, 15, 20.)

11 Раскрой скобки и упрости выражения:

а) $4x-(3x+(2x-1))$; б) $y-(2y-(3y-4))$; в) $z-(2z+(3z-(4z+5)))$.

12 а) Докажи, что для любого натурального числа n сумма удвоенного предыдущего и утроенного последующего числа при делении на 5 дает остаток, равный 1.

б) Докажи, что сумма четырех последовательных натуральных чисел, кратных 3, при делении на 12 дает остаток, равный 6.

13 Расставь скобки так, чтобы получилось верное равенство:

а) $m-n-m+n=2m-2n$; б) $m-n-m+n=2m$.

14 Вычисли устно:

а)	б)	в)	г)
$-7-(-3)$;	$-2{,}5\cdot(-8)$;	$\lvert 90\rvert : \lvert -0{,}3\rvert$;	$0:(-7{,}6)$;
$0{,}4-0{,}9$;	$-\frac{3}{4}\cdot 1{,}6$;	$\lvert -2{,}4\rvert\cdot\left\lvert\frac{1}{3}\right\rvert$;	$-1\cdot\left(-1\frac{2}{9}\right)$;
$-1{,}2+5$;	$4{,}2:(-0{,}7)$;	$\lvert -0{,}6\rvert-\lvert -4\rvert$;	$4{,}5:(-1)$;
$-0{,}7-0{,}8$;	$(-0{,}125):\frac{1}{8}$;	$\lvert -5{,}6\rvert+\lvert -0{,}2\rvert$;	$\left(3{,}4-3\frac{2}{5}\right)\cdot 6{,}4$.

15 Вычисли устно, расположи ответы в порядке возрастания и сопоставь их соответствующим буквам. Зачеркни две буквы так, чтобы получилось название геометрической фигуры. Сможешь ли ты ее нарисовать? А дать определение?

28	0,2	1	1,8	−6	4
· 0,25	· 0,3	: 0,25	−5	· 0,5	: 0,8
−0,6	+1,2	−6	+1,7	+2	−2,6
: 1,6	: 0,6	· 3,5	: 0,3	−0,2	: 0,03
: 0,1	−0,9	+5,6	· 0,9	: 0,6	· 0,2
Б	У	О	Р	К	М

16 **БЛИЦтурнир.**

а) Автобус проехал за первый час a км, за второй – b км, а за третий – c км. С какой средней скоростью он ехал?

б) Пешеход первые 5 мин шел со скорость n м/мин, а следующие 15 мин – со скоростью k м/мин. Найди среднюю скорость пешехода на этом участке.

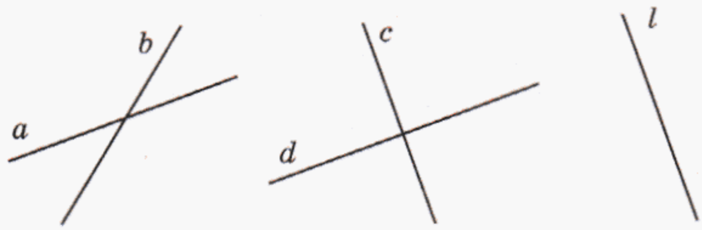
в) Лодка прошла d км по течению реки за 2 ч, а против течения – за 3 ч. Чему равна собственная скорость лодки? Чему равна скорость течения реки?

г) Катер и плот плывут по реке в одном направлении: катер – со скоростью x км/ч, а плот – со скоростью реки, равной y км/ч. Какое расстояние проплывет катер за 4 ч против течения реки, если его собственная скорость не изменится?

17 Реши уравнение и отметь его корни на координатной прямой. Найди координаты середины отрезка, соединяющего отмеченные точки. Что ты замечаешь?

а) $|a-4|=1$; б) $|b-2|=3$; в) $|c+1|=2$; г) $|d+3|=4$.

18 Найди на чертеже и перечисли все пары: а) пересекающихся прямых; б) непересекающихся прямых; в) параллельных прямых; г) перпендикулярных прямых. В каких из заданий (а) – (г) оказались одни и те же пары прямых? Как ты думаешь, почему?



19 Найди значения выражений, сопоставь их соответствующим буквам и расшифруй название геометрической фигуры. По справочнику найди определение этой фигуры и начерти ее в тетради.

Р $-4{,}5+(-a+5{,}6)$, если $a=-2{,}9$; **П** $(-1{,}1+m)-(3{,}1-m)$, если $m=0{,}9$;

О $-(2b-3)+b$, если $b=1{,}4$; **Л** $-(n-4{,}6)+(2{,}9-n)$, если $n=4{,}5$;

Г $c-(1{,}8-c)$, если $c=0{,}7$; **Е** $0{,}5-(2x+1{,}2)-x$, если $x=-0{,}3$;

М $-d-(0{,}7-3d)$, если $d=-0{,}8$; **А** $(y-5{,}4)-(-2{,}6+y)$, если $y=3$.

–2,4	–2,8	4	–2,8	–1,5	–1,5	0,2	–1,5	1,6	–0,4	4	–2,8	–2,3	–2,3

20 Реши уравнения и сделай проверку:

а) $-(a+4)-19=7$; б) $2\frac{1}{3}-\left(y-\frac{5}{12}\right)=1{,}75$.

21 Переведи на математический язык и реши задачу: В цирковом представлении участвовало 8 жонглеров, акробатов было на 6 больше, чем клоунов, а дрессировщиков – на 7 меньше, чем акробатов. Сколько было клоунов, если всего в этом представлении участвовало 28 артистов?

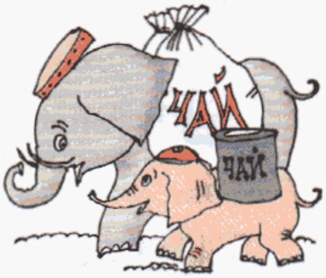
22 Докажи, что для любого натурального числа n среднее арифметическое его предыдущего и последующего чисел равно этому числу.

23 Найди значения выражений, сопоставь их соответствующим буквам и расположи полученные числа в порядке убывания. Расшифруй название математического термина. Что он означает?

Н $-4(a+1)-5$, если $a=-0{,}7$;	**Ь** $4(n-2)-3(n+2)$, если $n=7{,}6$;
Е $2b-3(b-4)$, если $b=6{,}8$;	**О** $-2(7+d)+3(-d+5)$, если $d=-1{,}9$;
Р $-m+2(-m+3)$, если $m=-0{,}8$;	**К** $-x+(3-2x)-2(x+4)$, если $x=-3{,}4$.

24 Составь выражение и найди его значение при данных значениях букв:
Пароход плыл 5 ч по течению реки и 3 ч против течения. С какой средней скоростью он плыл, если его собственная скорость равна v км/ч, а скорость течения реки – 2 км/ч? ($v = 28;\ 29{,}7;\ 35{,}5$.)

С **25** Раздели 25 рублей на 2 части так, чтобы одна часть была в 49 раз больше другой.



26 **Старинная задача.**
Имеет некто чай двух сортов – цейлонский по 5 гривен за фунт и индийский по 8 гривен за фунт. В каких долях надо смешать эти два сорта, чтобы получить чай стоимостью 6 гривен за фунт?

2. Коэффициент.

Если выражение со скобками представляет собой произведение чисел, то для его преобразования можно воспользоваться законами умножения. При этом используются известные нам правила знаков.

Пример 1.
Упростить выражение $12x \cdot 0{,}25 \cdot (-5y)$.

Решение:
Данное выражение представляет собой произведение множителей 12; x; 0,25; -5 и y. На основании сочетательного закона умножения можно отдельно сгруппировать числовые и буквенные множители:

$$12x \cdot 0{,}25 \cdot (-5y) = (12 \cdot 0{,}25 \cdot (-5)) \cdot (xy) = -15xy.$$

Число -15, полученное в результате умножения всех числовых множителей, называют **коэффициентом.** Коэффициент обычно записывают перед буквенными множителями. Вообще, ***если выражение является произведением числа и буквенной части, то числовой множитель в этом выражении называют коэффициентом.***

Например, коэффициент выражения $\frac{5}{6}a^2b$ равен $\frac{5}{6}$, а коэффициент выражения $-3{,}8mn^3$ равен $-3{,}8$.

Если в записи буквенного выражения отсутствует числовой множитель, то на помощь приходят равенства:

$$a = 1 \cdot a \qquad \text{и} \qquad -a = -1 \cdot a.$$

Эти равенства показывают, что коэффициентом выражения a является число 1, а выражения $(-a)$ – число (-1). Аналогично коэффициентом выражения, например, $(- xy^2z)$ считают число -1, а коэффициент выражения kp равен числу 1.

Пример 2.
Раскрыть скобки и упростить выражение $-2(5x - y + 4)$.

Решение:
Раскроем скобки и упростим каждое слагаемое:

$$-2(5x - y + 4) = -2 \cdot 5x + 2y - 2 \cdot 4 = -10x + 2y - 8.$$

Пример 3.
Раскрыть скобки и упростить выражение $3(-2a + b) - 2(a + 7b)$.

Решение:

$$3(-2a + b) - 2(a + 7b) = -6a + 3b - 2a - 14b = -8a - 11b.$$

К **27** Назови коэффициенты выражений. Какое из этих выражений может быть «лишним»? Почему?

а) $2xy$; б) k^5; в) $-3ab^4$; г) $-\frac{5}{6}m^3n^2$; д) $7c^4d \cdot (-2)$.

28 Прочитай выражения. Чем они похожи и чем отличаются? Найди их коэффициенты и буквенные части:

а) $(-2x)^2$, $-2x^2$ и $(-2)^2x$; б) $(-2m)^4$, $-2m^4$ и $(-2)^4m$.

29 Определи коэффициент выражения (устно):

а) $-a \cdot (-b) \cdot (-c) \cdot d$; в) $(-c)^2 \cdot (-m)^3$; д) $(-a)^5 \cdot (-b)^4$;

б) $-x \cdot (-y) \cdot (-n) \cdot (-m)$; г) $(-c^2) \cdot (-m^3)$; е) $(-a^5) \cdot (-b^4)$.

30 Определи коэффициент и буквенную часть выражения (устно):

а) $2a \cdot 7$; г) $4mn \cdot (-0{,}2)$; ж) $2c \cdot (-c) \cdot (-8)$; к) $(-5a)^2$;

б) $3b \cdot (-5c)$; д) $-x \cdot 2p \cdot (-0{,}5)$; з) $y \cdot 6y \cdot (-0{,}01y)$; л) $-5a^2$;

в) $-\frac{1}{2}x \cdot (-y)$; е) $-b \cdot (-3d) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$; и) $-0{,}25n \cdot (-4n^2)$; м) $(-5)^2a$.

31 Упрости выражение и подчеркни его коэффициент:

а) $-3a \cdot (-2b)$; в) $-1{,}5a \cdot (-a) \cdot 2a$; д) $0{,}8dy \cdot (-12{,}5y^2)$; ж) $(-0{,}7n)^2$;

б) $\frac{5}{12}x \cdot (-4y)$; г) $c \cdot \left(-\frac{4}{9}c\right) \cdot 0{,}9$; е) $-\frac{1}{3}m^2 \cdot (-15mb)$; з) $-3x \cdot (-3x)^2$.

32 Раскрой скобки и упрости выражение. Найди слагаемые, которые являются буквенными выражениями, и назови их коэффициенты:

а) $-3(-2a + 5)$; в) $4(-x + 3y) - 2(x + 5y)$; д) $5(3c - 2) + 2(4 - 7c)$;
б) $2(5b - 4c + 3)$; г) $-2(6d - k) + 3(4d - 2k)$; е) $3(-8 + 2y) - 4(2y - 6)$.

33 Запиши на математическом языке переместительное и сочетательное свойства умножения. Пользуясь ими, найди значения выражений:

а) $-5 \cdot (-0{,}78) \cdot 2 \cdot (-2{,}5) \cdot (-4)$; б) $-0{,}4 \cdot \dfrac{9}{17} \cdot (-0{,}25) \cdot 1{,}25 \cdot (-8) \cdot 17$.

34 Опровергни утверждения и построй их отрицания:

а) $\forall\ a \in Q$: $(-a)^2 = -a^2$; в) $\exists\ a \in Q$: $(-a)^2 \neq a^2$;
б) $\forall\ a \in Q$: $(-a)^2 \neq -a^2$; г) $\exists\ a \in Q$: $(-a)^3 \neq -a^3$.

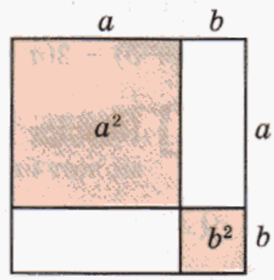
(Q – множество рациональных чисел.)

35 Прочитай выражения:

$(a + b)^2$; $a^2 + b^2$; $a^2 + 2ab + b^2$.

Найди значения этих выражений, если:
а) $a = 3$, $b = 5$; б) $a = -1$, $b = -4$; в) $a = -2$, $b = 3$.
Что ты замечаешь?

Проверь свою *гипотезу* для произвольно выбранных значений a и b. Попробуй обосновать ее, используя графическую модель.



36 **Арифметический фокус.**

Объясни арифметический фокус, используя математический язык:

Задумали число, увеличили его на 7, сумму умножили на 3, к произведению прибавили 4 и из результата вычли утроенное задуманное число. В ответе получилось 25.

37 Задумали число, умножили его на 8, произведение вычли из 100, разность удвоили, результат вычли из 15 и получили 7. Какое число задумали?

38 Упрости выражение и подчеркни его коэффициент:

а) $5 \cdot (-1{,}2x)$; в) $-2n \cdot 0{,}4n$; д) $(-4c)^2$;
б) $-\dfrac{2}{9}a \cdot (-3b)$; г) $y^2 \cdot (-6y) \cdot (-0{,}5)$; е) $(-0{,}1d)^3$.

39 Раскрой скобки и при необходимости упрости выражение:

а) $-2(c + 7)$; б) $5(2a - 3) - 4(3a - 4)$; в) $-2(2x + 3y) + 3(-x + 2y)$.

40 а) Задумали число, вычли из него 16, разность умножили на 7, результат вычли из 40 и получили 12. Какое число задумали?
б) Придумай и реши свою задачу про задуманное число.

C **41** Учитель показал ребятам арифметический фокус: он предложил задумать положительное число, умножить его само на себя, к полученному результату прибавить удвоенное задуманное число и еще 1. По объявленному результату он назвал задуманное число. Как это сделал учитель?

3. Приведение подобных слагаемых.

При работе с выражениями вначале их обычно *упрощают*, переходя к выражениям, записанными в более компактной, удобной форме.

Пусть, например, требуется найти значение выражения

$$-4,2x + 0,3x - 8,9x + x + 1,8x$$

при $x = 2,56$. Вычисления значительно упростятся, если заметить, что все слагаемые имеют один и тот же буквенный множитель x.

На основании распределительного закона умножения общий множитель можно вынести за скобки. Тогда в скобках останется сумма коэффициентов слагаемых, равная (-10). Поэтому данное выражение равно $(-10x)$:

$$-4,2x + 0,3x - 8,9x + x + 1,8x = (-4,2 + 0,3 - 8,9 + 1 + 1,8)x = -10x.$$

Аналогичные преобразования можно выполнить во всех случаях, когда слагаемые имеют одинаковую буквенную часть. Такие слагаемые называются **подобными**, а сами преобразования называются *приведением подобных слагаемых*.

Пример 1.
Найти значение выражения $1,4ab^2 - 9ab^2 + 3,6\,ab^2 - ab^2$ при $a = 2$, $b = -0,5$.

Решение:
В данном выражении все слагаемые подобны, так как они имеют одну и ту же буквенную часть ab^2. Приведем подобные слагаемые:

$$1,4ab^2 - 9ab^2 + 3,6ab^2 - ab^2 = (1,4 - 9 + 3,6 - 1)ab^2 = -5ab^2.$$

Если $a = 2$, $b = -0,5$, то $-5ab^2 = -5 \cdot 2 \cdot (-0,5)^2 = -10 \cdot 0,25 = -2,5$.
Ответ: $-2,5$.

Пример 2.
Привести подобные слагаемые в выражении $-2x - y + 4 + 5y - 8x - 6 + x$.

Решение:
В этом выражении есть три группы подобных слагаемых:
1) слагаемые $-2x$, $-8x$ и x имеют буквенную часть x;
2) слагаемые $-y$ и $5y$ имеют буквенную часть y;
3) слагаемые 4 и -6 не имеют буквенной части (их называют *свободными членами*).

Приведем подобные слагаемые в каждой из выделенных групп:

$$-\underline{\underline{2x}} - \underline{y} + 4 + \underline{5y} - \underline{\underline{8x}} - 6 + \underline{\underline{x}} = (-2 - 8 + 1)x + (-1 + 5)y + (4 - 6) =$$
$$= -9x + 4y - 2.$$

О т в е т: $-9x + 4y - 2$.

П р и м е р 3.

Упростить выражение $4(2n - 3k) - 2(-n - 3k + 6) - 3(k - 5)$.

Р е ш е н и е:

Раскроем скобки в выражении и приведем подобные слагаемые:

$$4(2n - 3k) - 2(-n - 3k + 6) - 3(k - 5) = 8n - 12k + 2n + 6k - 12 - 3k + 15 =$$
$$= (8 + 2)n + (-12 + 6 - 3)k + (-12 + 15) = 10n - 9k + 3.$$

О т в е т: $10n - 9k + 3$.

К **42** Что общего у слагаемых в каждом выражении? Упрости их, используя распределительное свойство умножения.

а) $-4n + n + 2n$; в) $-0{,}3a - a + 2{,}1a$; д) $1{,}8y - 2y + y - 0{,}4y - 1{,}3y$;

б) $3x - 7x - x$; г) $c - 1{,}6c - 0{,}9c$; е) $-\frac{4}{5}b + 0{,}2b - \frac{5}{6}b + b + \frac{1}{3}b$.

43 Найди подобные слагаемые и назови их коэффициенты:

а) $4a - \frac{1}{7}b + 2{,}3b - \frac{3}{7}a$; в) $-5a^2 + 9a - 4 + a^2 + 7 - 18a$;

б) $-0{,}3x^2y + xy^2 + 5x^2y - 2{,}1xy^2$; г) $2n^3m + 4{,}3nm^3 - 0{,}5n^2m^2 + 3{,}6nm^3$.

44 Приведи подобные слагаемые (устно):

а) $-3y + 12 - y - 5$; б) $2k - k^2 - 3k + 4$; в) $0{,}6x - x + 1{,}6y + 0{,}4x$.

45 Приведи подобные слагаемые:

а) $-7c + 3d + 8c - 5d$; в) $\frac{3}{5}k - \frac{2}{7}n - 3k - \frac{5}{7}n + 0{,}4k$;

б) $-9 + 2m - 4 - m + 8$; г) $-1 + p^2 - 3p + 0{,}2 - 0{,}5p^2 + 0{,}8 + 2{,}4p$.

46 Найди значения выражений:

а) $-\frac{2}{3}m + 4c + \frac{1}{2}m - 2{,}5c + \frac{1}{6}m$, если $c = -4$, $m = 5{,}6$;

б) $1{,}8x^2 + 0{,}6y^2 - 5{,}1y^2 + 3{,}2x^2 + 4{,}5y^2$, если $x = -0{,}8$, $y = 2{,}7$.

47 Раскрой скобки и приведи подобные слагаемые:

а) $-(y - 16) + 4(2y - 3)$; г) $-b(1 + x) + b(1 - x)$;

б) $5(a - 2b) + 3(-a + 3b)$; д) $1{,}6(2p - k) - 0{,}8(4p - 5k)$;

в) $4(m + 5n) - 5(m - 3n)$; е) $-0{,}2(5c + 3d) - 0{,}5(-4c + 0{,}8d)$.

48 Реши уравнения:

а) $8(x-4)+3(2-x)=-21$; в) $3(2n-5)-2(3-4n)=0$;

б) $2(3y+4)-(9y-7)=15$; г) $-4(0{,}3k-0{,}4)+6(-0{,}8k+0{,}2)=0$.

49 Найди значения выражений:

а) $2(6a-1)+4(2-a)$, если $a=-0{,}625$;

б) $15b-3(2b+5)+2(-5b+7)$, если $b=-0{,}8$;

в) $2n(n-4)-n(n-8)$, если $n=-1{,}5$;

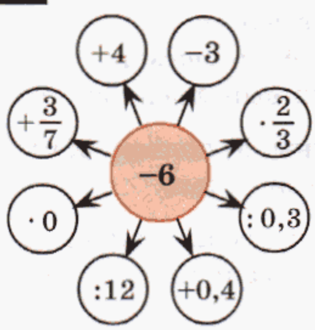
г) $x(x+y)-y(x-y)$, если $x=-4$, $y=-5$.

50 а) В магазин привезли 32 кг конфет. Их разложили в пакеты и коробки, причем пакетов было на 16 меньше, чем коробок. В каждый пакет положили по 1,5 кг конфет, а в каждую коробку – по 0,5 кг. Сколько всего пакетов и коробок для этого потребовалось?

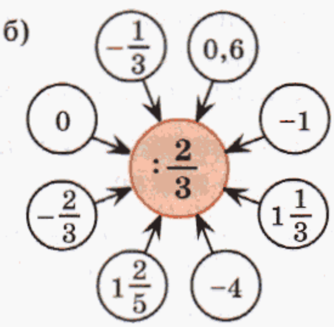
б) Патрульный катер плывет по реке, скорость течения которой 2 км/ч. За 6 ч по течению реки и 8 ч против течения катер проплыл 164 км. Сколько времени ему потребуется, чтобы проплыть 54 км по озеру, если он будет плыть с той же скоростью?

П **51** Вычисли, используя рисунки:

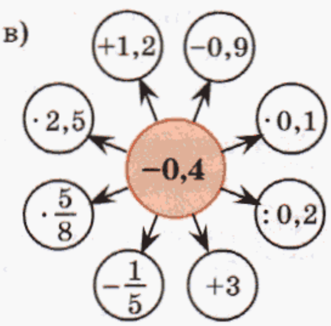
а)



б)



в)



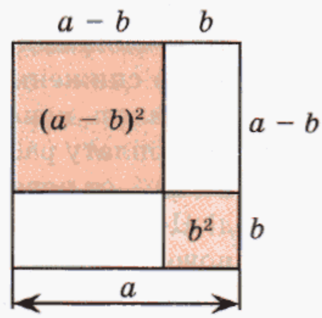
52 Вычисли, применив распределительный закон умножения:

а) $0{,}8\cdot 19+0{,}8\cdot 21$; в) $6\cdot(-0{,}9)+14\cdot(-0{,}9)$; д) $0{,}9\cdot 2{,}43-2{,}43$;

б) $\frac{2}{9}\cdot 43+\frac{2}{9}\cdot 32$; г) $0{,}3\cdot\frac{7}{11}-\frac{7}{11}\cdot 5{,}8$; е) $1\frac{1}{3}\cdot 4{,}6-1\frac{1}{3}\cdot 4{,}35$.

53 Прочитай выражения:

$(a-b)^2$; a^2-b^2; $a^2-2ab+b^2$.



Найди значения этих выражений, если:

а) $a=4$, $b=1$; б) $a=-3$, $b=2$; в) $a=-1$, $b=-5$.

Что ты замечаешь?

Проверь свою *гипотезу* для произвольно выбранных значений a и b. Объясни полученный вывод, используя графическую модель.

54 Определи, истинно или ложно высказывание. Для ложных высказываний построй отрицания:

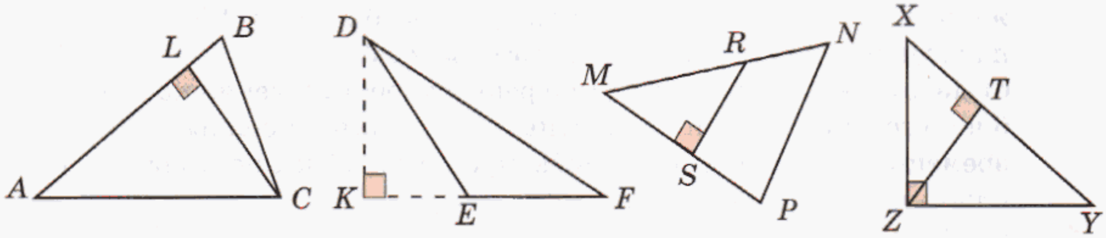
а) $\forall\ a, b \in Q$: $-(a - b) = b - a$;   в) $\exists\ a \in Q$: $a^2 > (a + 1)^2$;

б) $\forall\ a, b \in Q$: $-(a + b) = -a + b$;   г) $\exists\ b \in Q$: $b^3 < b^2$.

55 а) Прочитай определение и назови определяемое понятие.

> Высотой треугольника называется перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону.

б) Найди отрезки, являющиеся высотами треугольников на рисунке.



в) Сколько высот в треугольнике?

г) Начерти треугольник и проведи все его высоты. Что ты замечаешь? Повтори эксперимент еще раз и сформулируй *гипотезу*. Можно ли считать твою *гипотезу* доказанной на основании выполненных построений?

56 Вырази в процентах указанную часть величины: а) половина; б) четверть; в) пятая часть; г) треть; д) три четверти; е) три пятых.

57 На сколько процентов изменилась величина, если она: а) удвоилась; б) утроилась; в) уменьшилась в 4 раза; г) уменьшилась на четверть; д) увеличилась на половину?

58 **БЛИЦтурнир.**

а) В одном классе a человек, а в другом – на 20% больше. Сколько человек в двух классах?

б) Товар продали за b р. Прибыль составила 8% от себестоимости. Чему равна себестоимость товара?

в) До снижения цены футболка стоила x р., а после снижения – y р. На сколько процентов снизилась цена?

г) Зарплату рабочего, равную n р., повысили сначала на 10%, а потом еще на 40% от новой суммы. Какой стала зарплата после второго повышения?

д) Цену на компьютер снизили сначала на 20%, а потом еще на 50% от новой цены. После этого компьютер стал стоить k р. Какой была его первоначальная цена?

59 Реши уравнения методом *проб и ошибок*:

а) $x^2 = 4$; б) $x^2 = -1$; в) $x^2 + 9 = 0$; г) $x^2 - 25 = 0$.

60 Обед в столовой состоит из салата, борща, котлет и компота. Салат стоит 24 р., стоимость борща составляет 25% стоимости всего обеда, котлеты на 60% дороже борща, а компот – на 16 р. дешевле борща. Сколько стоит обед в этой столовой?

Д **61** Найди значения выражений:

а) $2a - 9b + 7a + b + 5b - 8a$, если $a = 2,5$, $b = \frac{1}{4}$;

б) $8x + 3 - 9x - 7 + 5 - x$, если $x = -0,3$;

в) $-m^2 + 2m - 4 - 3m - 6 + 2m^2 + m$, если $m = -5$.

62 Раскрой скобки и приведи подобные слагаемые:

а) $-3(a + b) + 2(a - b)$; в) $5(x - 5) - 3(2x - 9)$;

б) $2(m - 4n) - 4(m - 2n)$; г) $2y^2 - y(y - 3) + y(2 - y)$.

63 Реши уравнения:

а) $-2(x - 9) + 5(x - 4) = 25$; б) $4(5 - n) - 3(2n + 7) = 0$.

64 Составь выражение и найди его значение:

а) Чернослив при сушке теряет 64% своей массы. Сколько надо взять свежего чернослива, чтобы получить 27 кг сушеного?

б) Коммерческое предприятие продало товара на 5100 р. Убыток составил 15% от себестоимости. Чему равна себестоимость этого товара?

в) Метр ткани до повышения цен стоил 96 р., а после повышения стал стоить 120 р. На сколько процентов повысилась цена?

65 В магазин привезли 180 кг яблок. Некоторая часть яблок была продана по цене 16 р., а затем их цена увеличилась на 25%. После продажи всех яблок выручка составила 3360 р. Какая часть яблок была продана по более высокой цене?

66 Найди значение выражения:

$$\frac{10,2 : \left(18,5 - \left(5\frac{2}{3} \cdot 1,75 - 3\frac{2}{3} \cdot 1,75\right) : 2\frac{1}{3}\right)}{80,64 : 1,6 - 3,4 : \frac{1}{6}}.$$

С **67** Найди целые корни уравнения методом *проб и ошибок*:

а) $x^2(x + 1) = 80$; б) $x^4 + x^2 = 20$; в) $x^5 - x^4 = 162$.

68 Крестьянина на рынке спросили: «Сколько стоит десяток яиц?» Он ответил замысловато: «Двадцать пять яиц без полушки стоят пять полушек без пяти яиц». По какой цене продавал крестьянин десяток яиц? (1 полушка – это $\frac{1}{4}$ копейки.)

4. Понятие уравнения.

При построении математической модели задачи часто приходится по ее условию составлять равенство, обозначая неизвестную величину какой-либо буквой – обычно буквой x.

Так поступали математики еще в древности. При этом равенство с неизвестной величиной (или величинами) стали называть *уравнением*.

С уравнениями мы встречались, например, когда решали задачи методом проб и ошибок и методом перебора – мы находили неизвестное число x испытанием различных «кандидатов» на его роль. Фактически мы рассматривали букву x как переменную, а само уравнение – как равенство с переменной.

Итак, **уравнением** будем называть равенство, содержащее переменную, значение которой надо найти. Например, уравнениями являются равенства

$x^4 = 16,$ $\quad 2y + 3 = y^2,$ $\quad 0{,}06 = (n - 0{,}1)(n - 0{,}2).$

Напротив, записи

$17 - 4x,$ $\quad y + 8 \geqslant 25,$ $\quad 12 + 3 = 15$

уравнениями не являются: первые две записи не являются равенствами, а в равенстве $12 + 3 = 15$ нет переменной.

Таким образом, уравнение характеризуется двумя свойствами:

1) уравнение – это *равенство*;

2) в этом равенстве *имеется буква*, значение которой надо найти.

Отметим, что уравнение может содержать две и более переменных, но подробнее такие уравнения мы будем изучать в старших классах.

Уравнение, как и всякое предложение с переменной, при подстановке в него конкретных значений переменной может становиться истинным или ложным высказыванием.

Значение переменной, при подстановке которого в уравнение получается верное числовое равенство, называется **корнем уравнения**. Например, число 2 является корнем уравнения $x^3 - x = 6$, так как $2^3 - 2 = 6$. Напротив, число 3 не является корнем этого уравнения, так как $3^3 - 3 \neq 6$.

Заметим, что математический термин «корень» является примером *метафоры* в математическом языке. Подобно корню растения, который удерживает его в почве, корень уравнения «удерживает» его в множестве истинных высказываний.

После составления уравнения основной задачей становится нахождение ***всех*** его корней. Для этого прежде всего надо точно указать, в каком числовом множестве ищутся корни, или, как говорят, указать *множество значений переменной*.

В практических задачах множество значений переменной определяется жизненным смыслом ее условий. Например, если буквой x обозначено количество учеников в школе, то в полученном уравнении разумно считать, что переменная x принимает только натуральные значения.

В общем случае множеством значений переменной считают *множество всех ее значений, при котором уравнение имеет смысл*. Так, корни уравнения $x + 4 = 9$ мы будем искать на множестве рациональных чисел Q, то есть на множестве всех чисел, которые нам известны. А вот уравнение $\frac{x(x-3)}{x} = 0$ имеет смысл только для рациональных чисел x, отличных от нуля. Поэтому, несмотря на то что $x(x - 3) = 0$ при $x = 0$ и $x = 3$, корнем исходного уравнения будет являться только $x = 3$.

Число корней уравнения может быть различным. Например, уравнение $2x = 6$ имеет всего один корень – число 3. Уравнение $x^2 = 25$ имеет два корня – числа 5 и -5.

А корнем уравнения $2(x + 4) = 2x + 8$ является любое число, так как в обеих его частях стоят равные выражения.

Встречаются также уравнения, которые не имеют корней: например, $x + 4 = 2$, где $x \in N$. Действительно, сумма натуральных чисел x и 4 всегда больше 4, поэтому она не может быть равна 2. Таким образом, мы доказали, что данное уравнение не имеет натуральных корней. Если доказано, что корней у уравнения нет, то в математике также считают, что уравнение решено.

Проиллюстрировать это можно следующей бытовой ситуацией. Пусть мама попросила сына принести картошку из ящика, а там картошки не оказалось, и он ничего не принес. Выполнил ли он просьбу мамы? Очевидно, да, ведь мама ни в чем не может его упрекнуть.

Таким образом, *решить уравнение* – значит найти все его корни или доказать, что корней у него нет (на множестве значений переменной).

Вместо фразы «найти все корни уравнения или доказать, что корней нет» можно сказать короче: «найти множество всех корней уравнения». Эти два словосочетания означают одно и то же.

Итак, **решить уравнение – значит найти множество всех его корней.**

В случае отсутствия корней уравнения говорят, что множество его корней – пустое.

К **69** Какие из следующих записей являются уравнениями:

а) $2^3 = 8$; б) $|a - 3| = 7$; в) $9x - x^2$; г) $y \leqslant 4$; д) $11n = n^3$?

70 Докажи, что:

а) число -3 является корнем уравнения $x^2 - 5 = 2x + 10$;

б) число 5 не является корнем уравнения $|-y| = -y$;

в) число 0 является корнем уравнения $k^2 = 2k$;

г) число -2 не является корнем уравнения $a(a-1)(a+1) = 0$.

71 Является ли корнем уравнения $2x^2 + 5x + 2 = 0$ число:

а) 2; б) -2; в) $\frac{1}{2}$; г) $-\frac{1}{2}$?

72 Имеет ли корни уравнение и сколько:

а) $|x| = 3$, $|y| = -3$, $|z| = 0$;

б) $x^2 = 16$, $x^2 = -16$, $x^2 = 0$;

в) $\frac{x(x-5)}{x} = 0$, $\frac{2(y+3)(y-6)}{y} = 0$, $-4z(z-1)(z+2)(z-3)(z+4) = 0$?

73 Докажи, что корнем уравнения является любое число:

а) $(-x)^2 = x^2$; б) $(-x)^3 = -x^3$; в) $3(x-4) = x - 2(6-x)$; г) $|x| = |-x|$.

74 Докажи, что уравнение не имеет рациональных корней:

а) $x + 4 = x - 3$; б) $x^2 + 1 = 0$; в) $|2x - 3| = -1$.

75 Найди множество корней уравнения:

а) $6x - 2(3x - 7) = 14$;

б) $2y + 3(y - 2) - 5(y - 3) = 0$;

в) $z^2 = 25$;

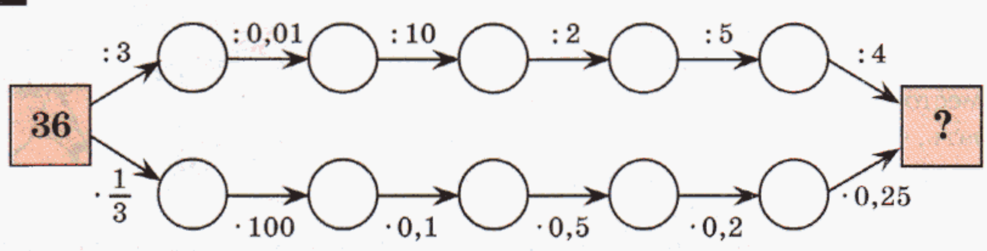
г) $t^2 = -36$;

д) $|5b + 4| = 0$;

е) $|c - 2| = 1$.

76 Реши уравнение $3x(x+2)(3x-5) = 0$ на множестве: а) Q; б) Z; в) N; г) положительных чисел; д) неотрицательных чисел.

П **77** Вычисли устно. Что ты замечаешь?



78 Прочитай выражения, используя понятия обратного и противоположного числа. Устно найди значения выражений при $x = -2$.

а) $\frac{1}{x}$; б) $-x$; в) $-\frac{1}{x}$; г) $\frac{1}{-x}$; д) $|-x|$; е) $-|x|$; ж) $(-x)^2$; з) $-x^2$.

79 Переведи высказывания с математического языка на русский и определи их истинность. Для ложных высказываний построй отрицания:

а) $\forall\ a \in Q{:}\ \ a \cdot \dfrac{1}{a} = 1$; в) $\exists\ a \in Q{:}\ \ -a > a$;

б) $\forall\ a,\ b \in Q{:}\ \ ab \neq 0$; г) $\exists\ a \in Q{:}\ \ -a^2 > (-a)^2$.

80 Составь уравнения и реши их, используя правило *весов*:

а) Задумали число, уменьшили его на 4, разность удвоили, результат увеличили на 9 и получили число, которое меньше задуманного на 2. Какое число задумали?

б) Число, которое больше задуманного на 3, относится к утроенному задуманному числу как 11 : 15. Найти задуманное число.

81 а) Реши уравнение методом *проб и ошибок*: $x\,(x + 12) = 64,\ \ x \in N$.

б) Реши уравнение методом *перебора*: $x\,(x - 9)(15 - x) = 70,\ \ x \in N$.

D **82** Найди множество корней уравнения:

а) $6(4x - 7) - 3(5 - 8x) = 0$; в) $n^2 = -4$; д) $|\,2a - 9\,| = 0$;

б) $2(9 - 5y) + 7(2y - 4) = 4(y - 2{,}5)$; г) $k^2 = 81$; е) $|\,b + 3\,| = 2$.

83 а) Реши уравнение методом *проб и ошибок*: $x\,(x - 4) = 96,\ \ x \in N$.

б) Реши уравнение методом *перебора*: $x^2 + 3x = 40,\ \ x \in N$.

84 Составь уравнение и реши его, используя правило *весов*:

«Задумали число, увеличили его в 5 раз, затем уменьшили на 8 и разность утроили. В результате получили утроенное задуманное число. Какое число задумали?»

C **85** **Задача Ньютона.**

Купец имел некоторую сумму денег. В первый год он истратил 100 фунтов, а к оставшейся сумме добавил третью ее часть. В следующем году он вновь истратил 100 фунтов и увеличил оставшуюся сумму на третью ее часть. В третьем году он опять истратил 100 фунтов. После того как он добавил к остатку третью его часть, капитал его стал вдвое больше первоначального. Чему был равен первоначальный капитал?

5. Решение уравнений.

Решение уравнений, то есть отыскание множества всех его корней, может осуществляться разными способами. Самый простой способ решения состоит в том, что данное уравнение приводят, если это возможно, к более простому или более удобному виду. При этом необходимо, чтобы ***новое уравнение было равносильно исходному,*** то есть имело с ним одни и те же корни.

При проведении равносильных преобразований мы используем, например, следующие известные нам правила и свойства:

1) *правила нахождения неизвестных компонентов арифметических действий* (слагаемого, уменьшаемого, вычитаемого, множителя, делимого, делителя);

2) *основное свойство пропорции* («перекрестное» правило);

3) *правило весов* (обе части уравнения можно поменять местами, можно увеличить, уменьшить, умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля);

4) *правила упрощения выражений* (законы арифметических действий, правила раскрытия скобок, приведение подобных слагаемых и т.д.).

Проанализируем решение уравнения

$$2\left(0{,}3x - \frac{2}{9}\right) - \left(-1\frac{1}{9} + \frac{2}{3}x\right) = \frac{x}{5}.$$

Вначале раскроем скобки и приведем подобные слагаемые в левой части уравнения:

$$0{,}6x - \frac{4}{9} + 1\frac{1}{9} - \frac{2}{3}x = \frac{x}{5} \;\Leftrightarrow\; \left(0{,}6 - \frac{2}{3}\right)x + \left(\frac{10}{9} - \frac{4}{9}\right) = \frac{x}{5} \;\Leftrightarrow\; -\frac{1}{15}x + \frac{2}{3} = \frac{x}{5}.$$

Умножим обе части уравнения на наименьший общий знаменатель всех слагаемых – число 15:

$$-\frac{1 \cdot 15}{15}x + \frac{2 \cdot 15}{3} = \frac{x \cdot 15}{5} \;\Leftrightarrow\; -x + 10 = 3x.$$

Прибавим к обеим частям уравнения слагаемое $+x$:

$$-x + x + 10 = 3x + x \;\Leftrightarrow\; 10 = 3x + x.$$

Упростим правую часть, поменяем ее местами с левой частью и найдем неизвестный множитель:

$$10 = 4x \;\Leftrightarrow\; 4x = 10 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{10}{4} \;\Leftrightarrow\; x = 2{,}5.$$

Поскольку в результате всех преобразований мы получали равносильные уравнения, то число $2{,}5$ является корнем исходного уравнения.

Алгоритмы решения уравнений формировались длительное время, и новые знания о свойствах чисел позволяли упрощать преобразования.

Так, появление отрицательных чисел привело к созданию приема *переноса слагаемых*, впервые описанному в IX веке среднеазиатским ученым Мухаммедом аль-Хорезми в сочинении «Китаб аль-Джебр ва-ль-Мукабаля». Прием ***«аль-джебр»*** – «воссоединение» – оказался таким удобным для решения уравнений, что от этого слова произошло название раздела математики ***алгебра***, изучающего и в настоящее время различные методы решения уравнений.

Идея «воссоединения» или «переноса» слагаемых возникает при сопоставлении уравнений, подобных

$$-x + 10 = 3x \qquad \text{и} \qquad 10 = 3x + x,$$

которые встретились нам выше. Чтобы избавиться от слагаемого $(-x)$ в левой части первого уравнения, мы прибавили к его обеим частям слагаемое $(+x)$. В результате $(-x)$ исчезло из левой части, но появилось в правой части с противоположным знаком.

Таким образом, можно сказать, что мы перенесли слагаемое $(-x)$ из левой части уравнения в правую, изменив его знак. Аналогично можно переносить слагаемые и из правой части уравнения в левую. При этом нет необходимости делать подробную запись, а лучше сразу руководствоваться следующим правилом:

Слагаемое можно переносить из одной части уравнения в другую, изменяя его знак на противоположный.

Пример 1.
Решить уравнение $8x - 9 = -2x + 3$.

Решение:
Соберем слагаемые, содержащие x, в левую часть, а свободные члены – в правую, затем упростим полученные выражения и найдем x:

$$8x - 9 = -2x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad 8x + 2x = 3 + 9 \quad \Leftrightarrow \quad 10x = 12 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1{,}2.$$

Ответ: $\{1{,}2\}$.

Однако решение уравнения не всегда можно свести к известным способам преобразований. Тогда на помощь могут прийти метод *проб и ошибок* и метод *перебора*.

Метод проб и ошибок заключается в следующем:
1) экспериментально подбираются корни уравнения;
2) доказывается, что других корней уравнение не имеет.

Пример 2.
Решить уравнение $x^2 + 3x - 54 = 0$, где $x \in N$.

Решение:
Перенесем слагаемое -54 в правую часть уравнения, а в левой части вынесем за скобки общий множитель x:

$$x(x + 3) = 54.$$

Число 6 является корнем данного уравнения. Действительно,

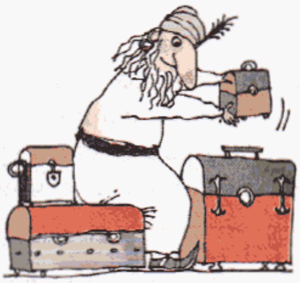
$$6(6 + 3) = 54 \text{ (истинно)}.$$

Других натуральных корней у этого уравнения нет, так как при увеличении множителей произведение также будет увеличиваться, а при уменьшении – уменьшаться. Значит, число 6 – единственный натуральный корень этого уравнения.

Ответ: $\{6\}$.

Метод перебора заключается в проверке всех возможных вариантов решения уравнения.

Например, глядя на уравнение $x(x + 3) = 54$, можно заметить, что его натуральные корни должны быть делителями числа 54. Значит, x может принимать лишь значения: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54. Подставляя эти числа вместо переменной x в уравнение, находим единственный корень: $x = 6$.



Решая уравнения, мы уже убедились в том, что использование свойств чисел и правил преобразования часто бывает удобнее, чем метод *проб и ошибок* и метод *перебора*. Действительно, не всегда удается подобрать корни уравнения и тем более доказать, что других решений нет. Перебор вариантов может оказаться слишком громоздким.

Именно поэтому математики всегда стремились найти общие способы решения различных классов уравнений. И уже сегодня известны формулы корней уравнения общего вида, таких как $ax + b = 0$, $ax^2 + bx + c = 0$, а также многих других уравнений. Их нам предстоит изучить в курсе алгебры старших классов.

К **86** Реши уравнения различными способами. Какой из способов ты находишь более удобным?

а) $-x + 3 = 2$; б) $-5 + y = -4$; в) $z - 9 = -3$; г) $-7 - t = 0$.

87 Реши уравнения, используя прием переноса слагаемых:

а) $9 - 4y = -5y$; г) $4n = -2 + 6n + 7$; ж) $\frac{5}{6}m + 2 = \frac{1}{3}m - 0{,}8$;

б) $12a - 1 = -a + 25$; д) $2 - c = 5c + 1$; з) $-1{,}6 - 0{,}3p = 0{,}9p + 0{,}2$;

в) $8 + 3b = -7 - 2b$; е) $-3d - 10 = 3d - 6$; и) $\frac{11}{12}x - \frac{2}{3} = -0{,}5 - \frac{3}{4}x$.

88 Повтори правила раскрытия скобок и реши уравнения:

а) $2a - (14 - 3a) = -10$; г) $-6x + 2(5 - 3x) = 8$;

б) $(9 - 2b) - (b + 5) = 16$; д) $18 - 4y = 7(2 - y) + 6$;

в) $-(4c - 7) = 5c + (11 - 7c)$; е) $4(-2z + 5) = 14 - 2(4z - 3)$.

89 Реши уравнения, приводя обе его части к целым коэффициентам:

а) $\frac{x}{5} - 4 = -0{,}1x + 2$; г) $3 - \left(\frac{2}{9}m + \frac{1}{6}\right) = \frac{m}{3} + 1{,}5$;

б) $0{,}4b + 0{,}8 = 0{,}9b - 2{,}7$; д) $2{,}6z - 0{,}2(3z - 9) = -0{,}5(2z + 6)$;

в) $1 - \frac{a}{7} = \frac{a}{14} - 0{,}25a$; е) $\frac{5}{12}(c - 3) - \frac{1}{6}(2c - 7) = 2$.

90 Реши уравнения, используя основное свойство пропорции:

а) $\frac{-3}{9-4a}=\frac{40}{200}$; б) $\frac{1-2b}{4}=\frac{0,8}{0,5}$; в) $\frac{5+3x}{12}=\frac{4x-3}{18}$; г) $\frac{0,9}{7+5y}=\frac{0,2}{y-4}$.

91 Реши уравнения на множестве натуральных чисел методом *перебора*:

а) $7x(9-2x)=70$; б) $x(2x-1)(4-x)(x+1)=60$.

92 Найди множество натуральных корней уравнения методом *проб и ошибок*:

а) $x(x+8)=33$; б) $3x^2-14x-15=0$.

93 а) В первой банке в 2 раза больше молока, чем во второй. Если из первой банки перелить во вторую 0,5 л, то молока в обеих банках станет поровну. Сколько молока в каждой банке?

б) В первой бочке в 4 раза больше меда, чем во второй. Если из первой бочки перелить во вторую 60 л, то в первой станет в 1,5 раза больше меда, чем во второй. Сколько меда в каждой бочке?

94 а) В школе 50% всех учеников начальных классов изучает французский язык, $\frac{2}{7}$ всех учеников – английский, а остальные 45 – немецкий. Сколько всего учеников в начальных классах этой школы, если каждый ученик изучает один язык?

б) Автомобиль прошел весь путь за три часа. За первый час он прошел треть всего пути, за второй – на 12 км больше, чем за первый, а за третий – 80% пути, пройденного за второй час. Чему равен весь путь?

95 а) В столовую завезли 150 кг гречки и 120 кг риса. Ежедневный расход равен 3 кг риса и 5 кг гречки. Через сколько дней гречки и риса станет поровну?

б) Двум рабочим требуется изготовить одинаковое количество деталей. Однако первый рабочий делал в день 25 деталей, а второй – только 20 деталей. Поэтому через 10 дней первому рабочему осталось сделать в 2 раза меньше деталей, чем второму. Сколько деталей осталось сделать каждому рабочему?

96 Найди множество корней уравнения:

а) $x=-\frac{1}{6}x$;

б) $3,2-5a=-1,8a+4$;

в) $4\frac{1}{6}-1\frac{1}{3}x=4x+3\frac{5}{18}$;

г) $0,3n-(2,6-0,9n)=1,2n+3$;

д) $1\frac{5}{7}(d+3)=-2(1-d)$;

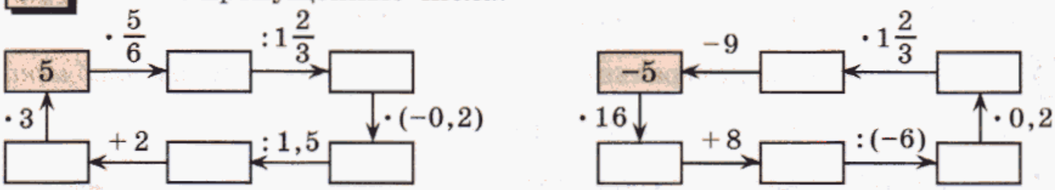
е) $0,6(-2k+3)-0,4(9-k)=-0,3(k-9)$;

ж) $\frac{5}{8}(m-2)-\frac{2}{3}(m+2)=m-3$;

з) $\frac{4x-3}{3-5x}=\frac{0,14}{0,35}$.

97 В древнеегипетском папирусе (1700 лет до н.э.) содержится решение уравнения, которое на языке современной математики можно записать так: $\left(\left(x+\frac{2}{3}x\right)+\frac{1}{3}\left(x+\frac{2}{3}x\right)\right)\cdot\frac{1}{3}=10$. Реши это уравнение.

98 Вставь пропущенные числа:



99 Как найти неизвестное слагаемое, уменьшаемое, вычитаемое? Найди x:

а) $x + 0,9 = 1,5$; в) $x - 3,8 = 1,4$; д) $0,8 - x = 1,3$;

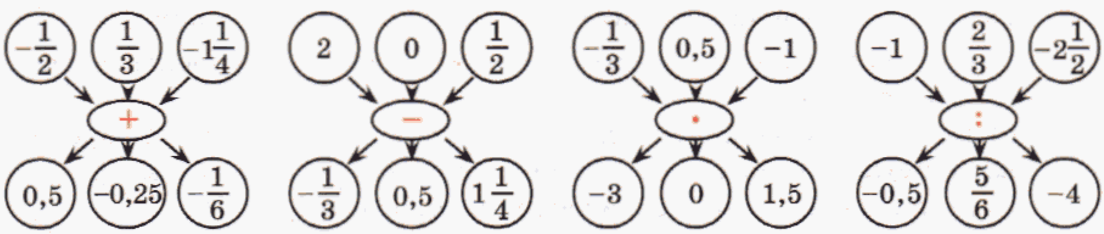
б) $2 - x = 0,3$; г) $-0,5 + x = 3,4$; е) $x - 3,6 = -5$.

100 Как найти неизвестный множитель, делимое, делитель? Найди x:

а) $3x = 0,24$; в) $6 : x = 0,4$; д) $x : (-1,2) = -0,3$;

б) $x : 0,9 = 0,5$; г) $-5x = 0,3$; е) $-0,8 : x = 0,01$.

101 Вычисли, используя рисунки:



102 а) Миша придумал схему для правила перевода смешанного числа в неправильную дробь (рис. 1). Расшифруй его схему.

б) Представь числа в виде неправильной дроби и продолжи ряд на три числа, сохраняя закономерность. Выдели из найденных чисел целую часть.

$1\frac{1}{3}$, $1\frac{3}{5}$, $2\frac{2}{7}$, $3\frac{5}{9}$ ...

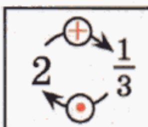


Рис. 1

103 Найди значения выражений:

а) $-3,25 - 1\frac{5}{12}$; в) $4,125\cdot\left(-3\frac{7}{11}\right)$; д) $-2,7\cdot 7\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{4}{11}\right)\cdot\left(-1\frac{1}{9}\right)\cdot 0,625$;

б) $2\frac{7}{15} - 8,3$; г) $-3\frac{9}{25} : (-2,4)$; е) $-4\frac{3}{7}\cdot 0,375 : 7,75\cdot(-0,9)\cdot 1\frac{13}{15} : \left(-\frac{3}{5}\right)^2$.

104 Какие способы сравнения дробей ты знаешь? Сравни дроби:

а) $\frac{3}{17}$ и $\frac{8}{17}$; в) $\frac{5}{3}$ и $\frac{18}{19}$; д) $\frac{15}{16}$ и $\frac{17}{18}$; ж) $\frac{5}{13}$ и $\frac{7}{20}$;

б) $\frac{16}{37}$ и $\frac{16}{49}$; г) $2\frac{1}{5}$ и $3\frac{2}{5}$; е) $\frac{4}{9}$ и $\frac{6}{11}$; з) $\frac{25}{6}$ и $\frac{17}{4}$.

105 Найди неизвестный член пропорции:

а) $\frac{7}{x} = \frac{28}{32}$; б) $\frac{5}{8} = \frac{y}{12}$; в) $\frac{z}{3,5} = \frac{2,4}{5,6}$; г) $\frac{0,06}{7,5} = \frac{0,2}{t}$.

Д **106** Реши уравнения:

а) $9 - 7y = 25 - 3y$;

б) $-2n = 5,6n$;

в) $2(11 - 4a) = 3 - (5a + 2)$;

г) $3(-5 + c) - 2(c - 4) = 2 - 7(c - 1)$;

д) $\frac{x}{3} + 5 = \frac{x}{4} + 3$;

е) $1,2d - 0,5(4d - 1) = -0,7(d - 2)$;

ж) $\frac{y}{9} - \left(y + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6} - \left(\frac{8y}{9} + 0,5\right)$;

з) $\frac{a - 3,2}{2a + 1,4} = \frac{0,9}{2,7}$.

107 Найди множество натуральных корней уравнения:

а) $5x^2 - 7x - 24 = 0$; б) $4x(x - 3)(7 - x) = 80$.

108 В первой канистре в 2 раза больше бензина, чем во второй. Если из каждой канистры отлить по 6 л, то в первой канистре станет бензина в 3 раза больше, чем во второй. Сколько литров бензина в каждой канистре?

109 В парке 20% всех деревьев составляют березы, третью часть – клены, дубов на 18 больше, чем кленов, а остальные 94 дерева – липы. Сколько всего деревьев в этом парке?

110 На овощную базу завезли 140 т картофеля и 80 т капусты. Потом с базы ежедневно вывозили картофеля в 2,5 раза больше, чем капусты, и через 8 дней их количество на базе стало одинаковым. Сколько всего тонн овощей вывозили ежедневно с базы, если овощи вывозили равномерно?

111 Найди значения выражений:

а) $1,25 - 4\frac{1}{12}$; в) $5 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 1,8$; д) $15 : \left(-\frac{5}{7}\right) - 2\frac{1}{3} \cdot \left(-2\frac{1}{7}\right)$;

б) $-2\frac{1}{8} - 3,4$; г) $4,5 \cdot \left(-5\frac{1}{3}\right) \cdot (-0,125)$; е) $-2\frac{4}{9} \cdot 1,6 : \left(-3\frac{2}{3}\right) \cdot 1,875$.

112 Увеличь на 300% число:

$$\frac{-\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{7} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)}{\frac{1}{21} \cdot \left(-\frac{2}{15}\right) \cdot 4} + \frac{\frac{5}{8} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}}{\frac{2}{3} - \frac{7}{12} - \frac{1}{4}}.$$

С **113** Запиши возможно большее число с помощью трех двоек. Реши ту же задачу, используя три четверки.

114 На гробнице замечательного математика древности Диофанта надпись составлена в форме задачи. Реши ее, пользуясь одним из переводов этой надписи:

Прах Диофанта гробница покоит:
дивись ей – и камень
Мудрым искусством его
скажет усопшего век.
Волей богов шестую часть жизни
он прожил ребенком
И половину шестой встретил с пушком на щеках.
Только минула седьмая –
с подругою он обручился.
С нею пять лет проведя, сына дождался мудрец.
Только полжизни отцовской
возлюбленный сын его прожил –
Отнят он был у отца ранней могилой своей.
Дважды два года родитель оплакивал тяжкое горе
Тут и увидел предел жизни печальной своей.

6. Решение задач с помощью уравнений.

Прежде чем ответить на вопрос, ***как*** решать задачи, попытаемся разобраться, ***для чего*** их решать.

Исторически многие задачи возникли как инструмент тренировки ума. Ситуации, описанные в них, часто создаются искусственно, явления и процессы окружающего мира не воспроизводятся буквально, а моделируются с сохранением существенных связей между величинами. Таким образом, решая задачи, мы учимся строить математические модели реальных ситуаций.

Распространенным видом математических моделей являются уравнения.

Математическое моделирование включает в себя три этапа:

1) *построение модели*;
2) *работу с моделью*;
3) *практический вывод из модели и его анализ.*

В соответствии с этим и решение задач с помощью уравнений состоит из трех этапов:

1) *составление уравнения*;
2) *решение уравнения*;
3) *ответ на вопрос задачи и его анализ.*

Решение уравнений (этап 2) рассмотрено нами в предыдущем пункте, а здесь мы более подробно остановимся на двух других этапах.

Составление уравнения (этап 1) начинается с выбора неизвестных величин. Если неизвестная величина одна, то ее обычно обозначают буквой x (или какой-нибудь другой буквой). Для этого прежде всего надо определить, о каких величинах идет речь в задаче, какая между ними взаимосвязь, какие из величин известны, а какие – нет.

В случае, если неизвестных величин несколько, то одну из них обозначают через x, а остальные – выражают через x. *Лучше обозначать величины так, чтобы получилось возможно более простое и удобное для решения уравнение.*

Есть еще один важный момент, на который нужно обращать внимание при составлении уравнения, – это *соответствие единиц измерения величин,* входящих в уравнение. Если, например, скорость движения выражена в километрах в час, а время – в минутах, то необходимо или время выразить в часах, или скорость – в километрах в минуту. В противном случае уравнение будет составлено неверно.

Решая задачу с помощью уравнения, надо помнить о том, что *не всегда корни уравнения являются искомыми величинами.* В этом случае для получения ответа надо с помощью полученных корней дополнительно выполнить необходимые преобразования.

Кроме того, *надо проверить соответствие полученного ответа реальности* (этап 3). Например, если получилось, что в классе 25,8 учащихся, то либо математическая модель задачи составлена некорректно, либо в решении допущена ошибка.

Итак, при решении задач с помощью уравнений можно руководствоваться следующим *алгоритмом*:

1) *Внимательно* прочитать условие и вопрос задачи.
2) Определить, какие величины известны, а какие – нет.
3) Проверить соответствие единиц измерения величин (если необходимо, согласовать их).
4) Установить взаимосвязи между величинами (если необходимо, записать их в виде формул, схем, таблиц).
5) Одну из неизвестных величин обозначить буквой x (или любой другой буквой).
6) Выразить через x значения других неизвестных величин.
7) Определить множество значений переменной x.
8) Составить уравнение.
9) Решить уравнение.
10) Соотнести полученные значения x с вопросом задачи (при необходимости найти искомую величину) и проверить соответствие полученного ответа реальности.

Приведем пример решения задач с помощью уравнений.

З а д а ч а. *В первой бочке было в 2 раза меньше огурцов, чем во второй. После того как из первой бочки взяли 500 г огурцов, а из второй – 6 кг, во второй бочке осталось на 60% огурцов больше, чем в первой. Сколько огурцов было во второй бочке первоначально?*

Прежде всего, заметим, что масса огурцов выражена в разных единицах измерения. Переведем граммы в килограммы: 500 г = 0,5 кг.

В задаче требуется найти исходную массу огурцов во второй бочке. Однако за x удобнее принять исходную массу огурцов в первой бочке, так как она меньше и у нас не появится дробей.

Для того чтобы составить уравнение, заполним таблицу:

	Масса огурцов в I бочке	Масса огурцов во II бочке
Было	x кг	$2x$ кг
Стало	$(x - 0,5)$ кг	$(2x - 6)$ кг

Р е ш е н и е:

1) $100\% + 60\% = 160\%$ – составляет масса огурцов, оставшихся во второй бочке от массы огурцов, оставшихся в первой бочке.

2) Пусть в первой бочке было x кг огурцов, тогда во второй бочке было $2x$ кг огурцов. В первой бочке осталось $(x - 0,5)$ кг, а во второй – $(2x - 6)$ кг огурцов. Масса огурцов, оставшихся во второй бочке, составляет 160% от массы огурцов, оставшихся в первой бочке, значит:

$$2x - 6 = 1,6(x - 0,5) \Leftrightarrow 2x - 6 = 1,6x - 0,8 \Leftrightarrow 0,4x = 5,2 \Leftrightarrow x = 13.$$

3) $13 \cdot 2 = 26$ (кг)

О т в е т: во второй бочке было 26 кг огурцов.

Обратим внимание, что в записи решения задачи, во втором действии, приведено ***обоснование уравнения***. В нем указано:

1) какая неизвестная величина принята за x;

2) как выражаются через x другие неизвестные величины;

3) условие, на основании которого составлено уравнение.

Составление уравнения – ключевой этап решения задач методом моделирования. Что для этого нужно? Прежде всего, знание формул зависимостей между величинами, умение выразить на математическом языке соотношения между ними («больше *на...*», «меньше *в...*» и т.д.). Еще важны собственный опыт составления уравнений, фантазия, смекалка, воображение. И старый совет:

Пробуй, а если не получается – пробуй еще!

К **115** а) От начала суток прошло 20% времени, которое осталось до конца суток. Который сейчас час?

б) До конца суток осталось $\frac{3}{5}$ времени, прошедшего от начала суток. Который сейчас час?

116 а) Мастер может выполнить весь заказ за 8 ч, а его ученик – за 10 ч. В час ученик делает на 15 деталей меньше мастера. Найди производительность мастера и производительность ученика.
б) Скорый поезд проходит расстояние между двумя городами за 10 ч, а пассажирский – за 12 ч 30 мин. Пассажирский поезд идет со скоростью на 28 км/ч меньшей, чем скорый. Чему равно расстояние между городами?

117 а) Грузовик проехал в первый день треть всего пути, во второй день – 90% пути, пройденного в первый день, а за третий день – остальные 440 км. Сколько километров проехал грузовик за второй день?
б) В апреле было отремонтировано $\frac{2}{9}$ дороги от села до станции, в мае – $\frac{6}{7}$ остатка, а в июне – остальные 5 км. Сколько километров дороги было отремонтировано в мае?

118 а) Из коробки взяли сначала 4 конфеты, а потом еще четверть оставшихся конфет. После этого в коробке осталось $\frac{2}{3}$ всех конфет. Сколько конфет осталось в коробке?

б) От бревна отпилили сначала 30% , а потом 40% остатка. После этого длина оставшейся части бревна стала 2,1 м. Сколько метров отпилили от бревна во второй раз?

119 а) В питомнике было 450 саженцев яблонь и 180 саженцев слив. За день продали в 4 раза больше яблонь, чем слив, и саженцев слив осталось на 150 меньше, чем яблонь. Сколько всего саженцев продали за этот день?
б) В первом бассейне было в 3 раза больше воды, чем во втором. Когда из обоих бассейнов выкачали по 200 $м^3$ воды, во втором осталось в 5 раз меньше воды, чем в первом. Сколько кубических метров воды было в каждом бассейне первоначально?

120 а) В первой пачке было в 1,5 раза больше тетрадей, чем во второй. После того как из первой пачки *переложили* во вторую 6 тетрадей, в обеих пачках тетрадей стало поровну. Сколько тетрадей было в каждой пачке?
б) В первом бидоне было в 4 раза больше оливкового масла, чем во втором. Когда из первого бидона *перелили* во второй 1,6 л, то во втором бидоне стало в 1,5 раза больше масла, чем в первом. Сколько литров масла стало в каждом бидоне?

121 а) Отрезок AB в 2 раза короче отрезка CD. Если длину отрезка AB увеличить на 3 см, а длину CD уменьшить на 40 мм, то длина AB составит 75% длины CD. Чему равна длина отрезка CD?
б) Отрез ткани разрезали на два куска так, что 80% длины первого куска были равны 90% длины второго. На сколько процентов первый кусок длиннее второго?

122 а) В двух пакетах 5 кг сахара. После того как из первого пакета отсыпали $\frac{2}{3}$ части, а из второго – $\frac{1}{7}$ часть, в обоих пакетах сахара стало поровну. Сколько сахара было в каждом пакете первоначально?

б) В первом вагоне трамвая ехало в 1,2 раза меньше пассажиров, чем во втором. На остановке из первого вагона вышел 1 человек, а вошли 6. Из второго вагона вышли 4 человека, а вошли 3, и во втором вагоне стало на 8% меньше пассажиров, чем в первом. Сколько пассажиров стало в каждом вагоне?

123 а) В одном классе на 5 учеников меньше, чем во втором. Когда в первом классе число учеников увеличилось на 8%, а во втором – уменьшилось на 10%, в обоих классах учеников стало поровну. Сколько учеников стало в каждом классе?

б) На просмотр фильма «Сибирский цирюльник» из двух классов пошло одинаковое число учеников. Девочек из первого класса было 12, а из второго – на 25% больше. Мальчиков из первого класса было на $33\frac{1}{3}\%$ больше, чем из второго. Сколько учеников каждого класса посмотрели этот фильм?

124 а) Чайник и 6 чашек стоят вместе 480 р. Чайник стоит на 50% дороже чашки. Сколько стоит чайник с 2 чашками?

б) Футболка, шорты и жакет стоят 792 р. Футболка на 20% дешевле, чем шорты, а жакет на 20% дороже, чем шорты и футболка вместе. Сколько стоят футболка вместе с жакетом?

125 а) За контрольную работу $\frac{1}{6}$ часть класса получила пятерки, $\frac{8}{15}$ – четверки, троек было на 10 меньше, чем четверок, а двоек – 3. Какой процент учеников класса написал контрольную работу на «4» и «5»? Сколько было четверок, а сколько – пятерок?

б) Первое число больше второго на 3. Если меньшее число увеличить на 50%, а большее уменьшить на 40%, то их сумма не изменится. На сколько процентов первое число больше второго? На сколько процентов второе число меньше первого?

126 а) Трем братьям вместе 45 лет. Возраст младшего брата на 60% меньше возраста среднего брата, а возраст старшего брата – на 60% больше возраста среднего. Сколько лет каждому?

б) В библиотеке книги на французском языке составляют 48% от числа книг на английском языке, а вместе они составляют 5% числа всех книг в библиотеке. Сколько всего книг в библиотеке, если книг на английском языке на 260 больше, чем на французском?

127 а) Смешали сухие листья зверобоя и мяты, причем мята составила 40% смеси. Если в эту смесь добавить еще 80 г мяты, то она будет составлять половину смеси. Сколько смешали первоначально граммов зверобоя и сколько – мяты?

б) В 5%-й раствор соли добавили еще 50 г соли, и концентрация соли в нем увеличилась до 24%. Сколько граммов соли было в растворе первоначально?

128 а) Первая сторона треугольника составляет $\frac{4}{9}$ его периметра, вторая – на 10% меньше первой, а третья равна 14 см. Найди периметр треугольника.

б) Периметр четырехугольника равен 58 см. Первая его сторона составляет 60% второй, третья – на 25% меньше суммы первых двух, а четвертая – на 7 см больше первой. Чему равна длина каждой стороны?

129 а) Ширина прямоугольника на 48% меньше длины, а его периметр равен 7,6 см. Чему равна площадь этого прямоугольника?

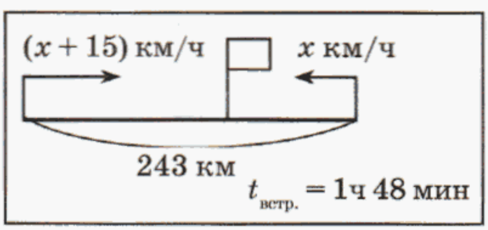
б) Длина прямоугольника на 3,6 см больше ширины, а ширина составляет $\frac{1}{7}$ его периметра. Чему равна площадь прямоугольника?

130 а) Пароход, собственная скорость которого 22 км/ч, прошел за 1 ч 15 мин по течению реки такое же расстояние, как и за 1 ч 30 мин против течения. Чему равна скорость течения реки?

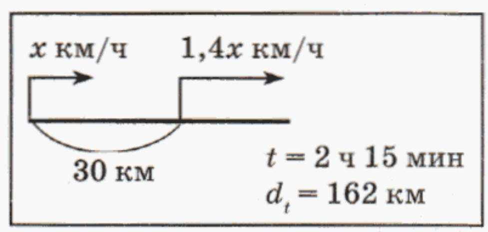
б) Моторная лодка за 2 ч против течения реки прошла расстояние, на 25% меньшее, чем за то же время по течению. Чему равна собственная скорость лодки, если скорость течения равна 2,5 км/ч? Найди лишнее данное в условии этой задачи.

131 Составь задачи и найди скорости движения автомобилей по схемам:

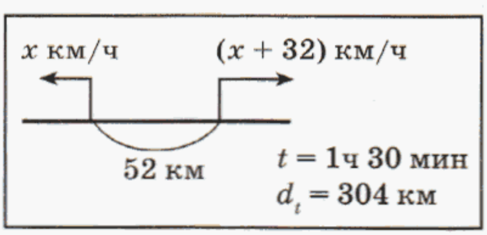
а)



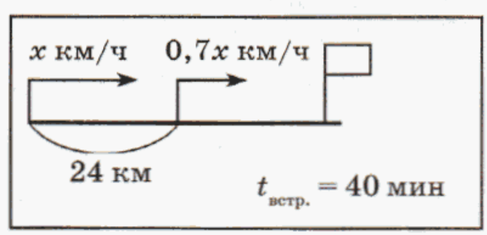
в)



б)



г)



(d_t – расстояние между автомобилями в указанный момент времени t.)

132 а) Из двух пунктов, расстояние между которыми 2 км, одновременно навстречу друг другу отправились пешеход и всадник. Чему равна скорость каждого из них, если всадник ехал на 12 км/ч быстрее пешехода и они встретились через 5 мин?

б) Пассажирский и товарный поезд вышли одновременно в одном направлении с двух станций, расстояние между которыми 256 км. Скорость пассажирского поезда была на 50% больше скорости товарного, и через 8 ч после выхода пассажирский поезд догнал товарный. С какими скоростями они шли?

133 а) Грузовик и легковой автомобиль ехали по шоссе навстречу друг другу. Через 20 минут после встречи расстояние между ними стало равно 54 км. Скорость грузовика относится к скорости автомобиля как 4 : 5. За сколько времени каждый из них пройдет расстояние, равное 324 км?

б) От автобусной станции отъехал междугородный автобус, а через 15 мин вслед за ним в том же направлении – рейсовый. Скорость междугородного автобуса на 20% больше скорости рейсового. С какими скоростями они ехали, если через 30 мин после выхода рейсового автобуса расстояние между ними было равно 20 км?

П **134** **Счет-тест** (записываются только ответы).

Тест 1 (2 мин).

$-0{,}4 + 1{,}2$; $\quad -4{,}6 - 1{,}3$; $\quad -0{,}9 - 0{,}6$; $\quad -1{,}4 - 3{,}6$; $\quad 2 - 0{,}05$;

$0{,}7 - 3$; $\quad -2{,}5 + 4{,}9$; $\quad 3{,}5 - 1{,}7$; $\quad 1{,}6 - 5{,}2$; $\quad -0{,}8 + 1{,}58$.

Тест 2 (2 мин).

$-0{,}5 \cdot 0{,}9$; $\quad -7{,}8 : (-100)$; $\quad 2{,}6 : (-0{,}01)$; $\quad -3 : (-5)$; $\quad (-0{,}3)^2$;

$3{,}2 : (-0{,}4)$; $\quad -2{,}5 \cdot 0{,}1$; $\quad -1{,}9 : (-10)$; $\quad 0{,}7 \cdot (-80)$; $\quad (-0{,}2)^3$.

Тест 3 (3 мин).

$\frac{1}{2} \cdot (-0{,}3)$; $\quad -\frac{1}{9} \cdot 5{,}4$; $\quad -0{,}4 \cdot (-2{,}5)$; $\quad \frac{5}{7} \cdot (-0{,}2)$; $\quad (-0{,}8) : \frac{8}{9}$;

$-0{,}9 : \left(-\frac{1}{3}\right)$; $\quad 1 : (-0{,}6)$; $\quad -0{,}125 \cdot 0{,}64$; $\quad -2\frac{1}{3} \cdot (-3)$; $\quad 0{,}5 : (-15)$.

135 Как найти часть от числа, выраженную дробью? Как найти число по его части, выраженной дробью? Найди:

а) $\frac{2}{3}$ от числа 4,5; $\qquad$ д) число, $\frac{4}{9}$ которого равны 2,4;

б) 18% от числа 60; $\qquad$ е) число, 3% которого равны 5,25;

в) $\frac{5}{6}$ от числа a; $\qquad$ ж) число, $\frac{1}{3}$ которого равна c;

г) 140% от числа b; $\qquad$ з) число, 250% которого равны d.

136 1) Увеличь число x: а) в 5 раз; б) на четверть; в) на 70% ; г) на 320% .
2) Уменьши число y: а) на 2; б) на треть; в) на 20% ; г) на 5% .

137 Найди процентное отношение чисел: а) 4,8 и 12; б) 12 и 4,8. На сколько процентов 4,8 меньше 12? На сколько процентов 12 больше 4,8?

138 Рассмотри равенства. Сколько процентов составляет число a от числа b? Сколько процентов составляет число b от числа a? На сколько процентов каждое из этих чисел больше или меньше другого?

1) $a = 0{,}8b$; 2) $a = 2b$; 3) $a = 0{,}6b$; 4) $a = \frac{10b}{9}$.

139 а) Увеличивается или уменьшается дробь при сокращении? Запиши свое высказывание на математическом языке и обоснуй его.
б) Сократи дроби с натуральными числителями и знаменателями:

1) $\frac{546}{910}$; 2) $\frac{264}{1056}$; 3) $\frac{4abc}{12a^2c}$; 4) $\frac{15x^2y}{40xyz}$; 5) $\frac{ax-ay}{ax+ay}$; 6) $\frac{mn}{mn+m}$.

140 Прочитай высказывание и определи, истинно оно или ложно. Для ложных высказываний построй отрицания:

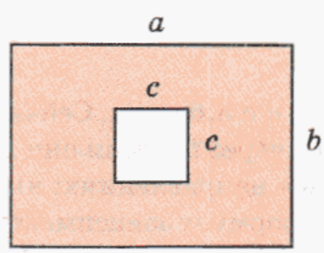
а) $\forall\, a \in Q$: $a^2 > 0$; в) $\exists\, a \in Q$: $a^2 < 0$;
б) $\forall\, a \in Q$: $a^2 \geqslant 0$; г) $\exists\, a \in Q$: $a^2 \leqslant 0$.

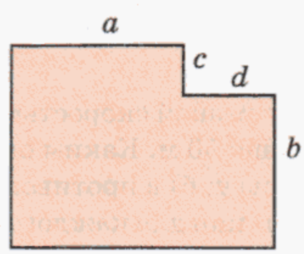
141 Найди значения выражений:

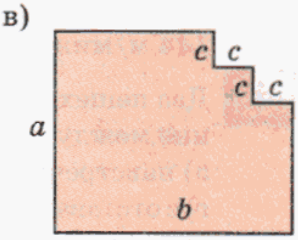
а) $a(2a - b) - b(a - 2b) - 2(a^2 + b^2)$, если $a = -2\frac{1}{3}$, $b = 1{,}5$;

б) $x(x + 3y) - y(3x - y) - (-x^2 + y^2)$, если $x = -0{,}5$, $y = 1\frac{1}{7}$.

142 Составь выражения для вычисления площади фигур:

а)


б)


в)


143 Выполни действия и найди следующее число в ряду ответов при сохранении закономерности:

а) $-2 : 0{,}03 - 11\frac{2}{3} : (-1)$;

$\left(4{,}5 - 5\frac{1}{6}\right) \cdot (4{,}5 : 0{,}1)$;

$\left(-1\frac{1}{3}\right)^2 : (-0{,}8) + 2\frac{7}{9} \cdot (-1)$;

б) $0{,}125 \cdot (-0{,}32) + \frac{5}{9} \cdot (-2{,}7)$;

$2{,}4 \cdot 1\frac{5}{12} - 17{,}8 - (-1)^2$;

$\left(\left(-\frac{1}{5}\right)^2 - 0{,}25 : \left(-\frac{1}{6}\right)\right) : (-0{,}01)$.

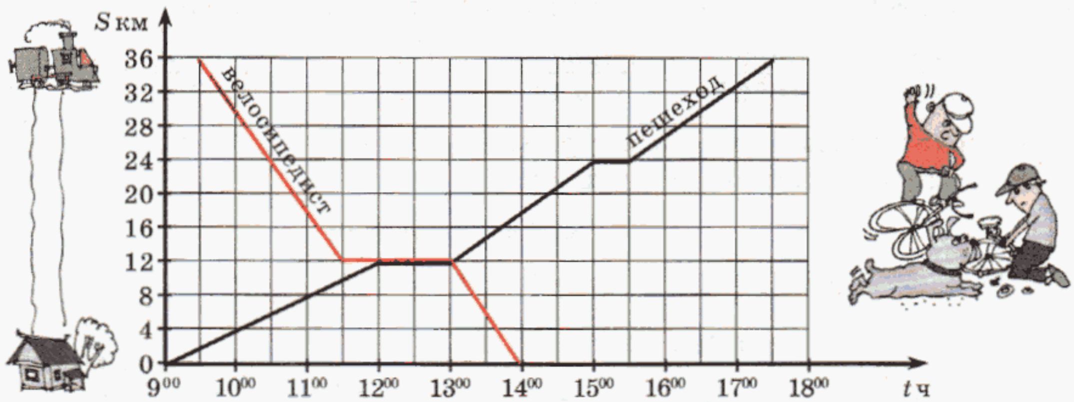
144 Построй четырехугольник $ABCD$ по координатам вершин: $A\ (4;\ 2)$, $B\ (2;\ 8)$, $C\ (14;\ 12)$, $D\ (10;\ 0)$. Проведи диагонали и определи координаты точки их пересечения. Найди как можно больше свойств четырехугольника $ABCD$.

145 Зависимости между величинами заданы с помощью формул. Переведи высказывания с математического языка на русский.

$S = ab$; $P = 2(a + b)$; $s = vt$; $s = v_{сбл.} \cdot t_{встр.}$;

$V = abc$; $S = 2(ab + bc + ac)$; $a = bc + r,\ r < b$; $v_{соб.} = (v_{по\ теч.} + v_{пр.\ теч.}) : 2$.

146 На графике показано движение пешехода и велосипедиста по дороге от деревни до станции. Определи по графику: а) момент их выхода и направление движения; б) время и место встречи; в) скорости движения на всех участках; г) время и продолжительность остановок.



147 Вырази в указанных единицах измерения:
а) в метрах в минуту: 12 км/ч; 1,8 км/ч; 3 км/ч; 1,5 м/с; 4 м/с; 0,8 м/с;
б) в километрах в час: 25 м/мин; 150 м/мин; 400 м/мин; 5 м/с; 12,5 м/с; 40 м/с;
в) в метрах в секунду: 9 км/ч; 54 км/ч; 126 км/ч; 90 м/мин; 120 м/мин; 144 м/мин.

148 Два пешехода идут с разной скоростью: 5,4 км/ч и 3,6 км/ч. Сейчас расстояние между ними равно 50 м. Каким оно станет через t с, если они движутся: а) навстречу друг другу; б) в противоположных направлениях; в) вдогонку; г) с отставанием? Запиши для каждого случая формулу зависимости расстояния d м между пешеходами от времени движения t с. (Встречи за это время не произойдет.)

Д *Реши задачи № 149 – 152 с помощью уравнений:*

149 а) Олег разместил в первый альбом 20% своих марок, во второй – $\frac{1}{3}$ остатка, а в третий – остальные 56 марок. Сколько всего марок у Олега?
б) В течение июня солнечных дней было на 20% больше, чем пасмурных, а дождливых – на 4 дня меньше, чем солнечных. Какой процент солнечных дней был в июне?

150 На двух элеваторах зерна было поровну. Когда из первого элеватора вывезли 140 т зерна, а из второго – в 2,5 раз больше, во втором элеваторе зерна осталось в 2,4 раза меньше, чем в первом. Сколько тонн зерна было на элеваторах первоначально?

151 Семья заготовила на зиму 180 кг картофеля. К концу зимы картофеля было израсходовано на 40% больше, чем его осталось. Сколько килограммов картофеля осталось к концу зимы?

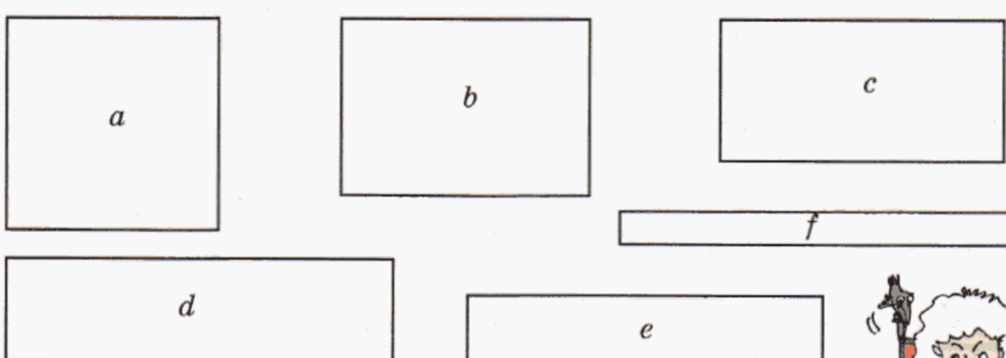
152 На обивку дивана и двух кресел потребовалось 12,3 м^2 ткани. На обивку одного кресла пошло на 68% меньше ткани, чем на обивку дивана. Сколько ткани идет на обивку одного кресла?

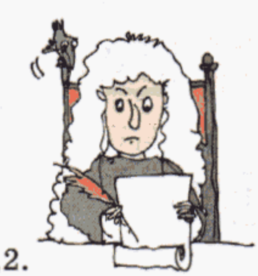
153 Сократи дроби с натуральными числителями и знаменателями:

а) $\dfrac{510}{1122}$; б) $\dfrac{7,5\cdot 3,6-3,6\cdot 1,5}{1,8\cdot 7,5+1,5\cdot 1,8}$; в) $\dfrac{40a^2bc}{16ab^2c}$; г) $\dfrac{mx+my}{mxy}$; д) $\dfrac{2n^3}{3n^2}$.

154 В субботу утром Иван Иванович вышел из дачного поселка к автобусной остановке. Через 0,25 ч вслед за ним их того же поселка и к той же остановке выехал на велосипеде со скоростью 14 км/ч Иван Петрович и через 6 мин догнал Ивана Ивановича. С какой скоростью шел Иван Иванович? На сколько минут быстрее него проехал расстояние от поселка до остановки Иван Петрович, если Иван Иванович прошел это расстояние за 42 мин?

155 Измерь стороны прямоугольников. Вычисли площадь каждого прямоугольника и отношение его большей стороны к меньшей. Что ты замечаешь? Сформулируй *гипотезу*.





156 Найди значение выражения:

а) $a(a+x)-x(a-x)-(-a^2+x^2)$, если $a=-0,6$, $x=-2\dfrac{1}{6}$.

б) $-n(2n-3k)-k(3n+2k)+3(n^2-k^2)$, если $n=-\dfrac{1}{2}$, $k=0,2$.

157 Построй многоугольник $A_1A_2...A_{37}$ по координатам его вершин:
$A_1(5;\ 0)$, $A_2(5;\ 5)$, $A_3(3;\ 5)$, $A_4(3;\ 6)$, $A_5(2;\ 6)$, $A_6(2;\ 11)$, $A_7(0;\ 11)$, $A_8(1;\ 12)$, $A_9(1;\ 13)$, $A_{10}(3;\ 13)$, $A_{11}(3;\ 7)$, $A_{12}(4;\ 7)$, $A_{13}(4;\ 8)$, $A_{14}(5;\ 8)$, $A_{15}(5;\ 9)$, $A_{16}(9;\ 9)$, $A_{17}(9;\ 8)$, $A_{18}(10;\ 8)$, $A_{19}(10;\ 7)$, $A_{20}(11;\ 7)$, $A_{21}(11;\ 8)$, $A_{22}(12;\ 8)$, $A_{23}(12;\ 9)$, $A_{24}(13;\ 9)$, $A_{25}(13;\ 10)$, $A_{26}(14;\ 10)$, $A_{27}(14;\ 7)$, $A_{28}(12;\ 7)$, $A_{29}(12;\ 6)$, $A_{30}(11;\ 6)$, $A_{31}(11;\ 5)$, $A_{32}(9;\ 5)$, $A_{33}(9;\ 0)$, $A_{34}(8;\ 0)$, $A_{35}(8;\ 5)$, $A_{36}(6;\ 5)$, $A_{37}(6;\ 0)$, A_1.
Что получилось?

158 Группа туристов вышла в 9 ч из пансионата «Ока» на экскурсию в дом-музей Есенина в деревне Константиново. Их путь проходил вдоль реки. Первые 2 ч они шли со скоростью 3 км/ч. Затем после часового привала туристы увеличили скорость на 1 км/ч и через 2,5 ч дошли до музея. Обед и экскурсия длились 2 ч, и обратный путь туристы проделали в лодке по той же реке со скоростью 8 км/ч. Построй график движения туристов и определи по графику, успеют ли они к ужину, который начинается в пансионате в 19 ч?

159 Вырази в указанных единицах измерения:
а) в метрах в минуту: 9 км/ч; 5 м/с;
б) в километрах в час: 400 м/мин; 20 м/с;
в) в метрах в секунду: 27 км/ч; 150 м/мин.

160 Найди число, 11% которого составляет число:

$$0{,}125 : \left(\frac{(0{,}45+0{,}25):4{,}2}{(0{,}9+0{,}5):2{,}1} - \frac{3\frac{3}{4}-(7{,}55-3{,}8)}{\frac{4}{25}\cdot 0{,}25+6{,}23}\right) + \frac{7\frac{1}{8}:1{,}9}{1-0{,}6:\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3}}.$$

161 Найди 45% от числа:

$$\frac{2\frac{1}{6}+1{,}5}{2\frac{1}{6}-1{,}5} + \frac{\frac{2}{13}\cdot\left(5{,}84+7\frac{4}{25}\right)}{\frac{4}{9}:4\frac{4}{9}-0{,}05} - \frac{\left(\frac{19{,}2}{0{,}12}-3{,}4\right):0{,}9}{1{,}2:\frac{1}{29}\cdot\frac{1}{2}} - 29{,}9.$$

162 На сколько процентов число 27 больше числа:

$$\frac{-28\frac{3}{7}-3{,}6:(-0{,}09)}{0{,}2\cdot 6\frac{1}{7}-1{,}5\cdot 0{,}2-0{,}2\cdot 1\frac{3}{7}} + \frac{5{,}7:18{,}5\cdot 3{,}7}{0{,}7\cdot 1{,}9:(-2{,}8)} - \frac{1\frac{5}{8}+9\frac{7}{12}-20\frac{11}{24}}{3\frac{1}{24}-1{,}5}.$$

С **163** Сколько различных пар по два любых цветка в каждой можно составить из васильков, ромашек и колокольчиков? Как изменится решение, если пары можно составлять только из двух разных цветков?

164 Составь все возможные двузначные числа из цифр 1, 3, 5 и 7, если:
а) цифры в записи числа могут повторяться;
б) цифры в записи числа не повторяются.

165 Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4 и 5, если цифры в записи числа: а) не повторяются; б) могут повторяться?

166 Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 2, 4, 6, 8 и 0, если цифры в записи числа а) не повторяются; б) могут повторяться?

167 У Тани 4 юбки, 5 блузок и 2 жакета. Сколькими различными способами она может составить костюм, состоящий из одной юбки, одной блузки и одного жакета?

§ 4. Координатная плоскость

1. Прямоугольные координаты на плоскости.

В повседневной жизни можно услышать фразу: «Оставьте мне свои *координаты*». Это означает, что человек должен оставить свой адрес или номер телефона, то есть данные, по которым его можно найти.

Координаты – это набор данных, по которому определяется положение того или иного объекта. Примерами координат являются широта и долгота местности на географических картах, номер вагона и места в поезде, номер ряда и места в кинотеатре и т.д.

С координатами мы уже не раз встречались и в математике: обозначали с помощью чисел положение точек координатной прямой и координатного угла. Например, положение точки A на рис. 2 определяется числом (-4), а положение точки B на рис. 3 – упорядоченной парой чисел $(5; 2)$.

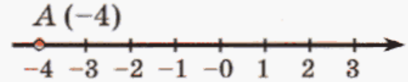


Рис. 2

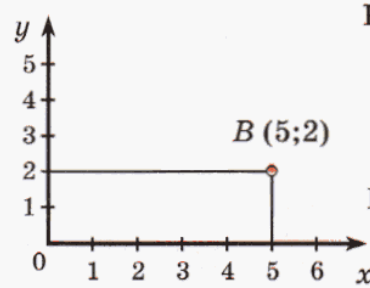


Рис. 3

Введение отрицательных чисел позволяет сделать следующий шаг: определить положение теперь уже *любой точки на плоскости*. Для этого достаточно стороны координатного угла продолжить до координатных прямых. Таким образом, мы приходим к понятию *системы координат на плоскости*.

Система координат на плоскости может быть задана парой перпендикулярных координатных прямых с общим началом отсчета O. Одну из этих прямых называют **осью абсцисс** (или осью x), а другую – **осью ординат** (осью y). Единичные отрезки на осях обычно выбирают одинаковыми, ось абсцисс располагают горизонтально, а ось ординат – вертикально. Положительное направление на оси абсцисс выбирают слева направо, а на оси ординат – снизу вверх, и показывают его стрелкой.

Плоскость, на которой задана система координат, называется **координатной плоскостью.** Оси разбивают координатную плоскость на четыре области, которые называют **координатными четвертями**. Их нумеруют против часовой стрелки (рис. 4).

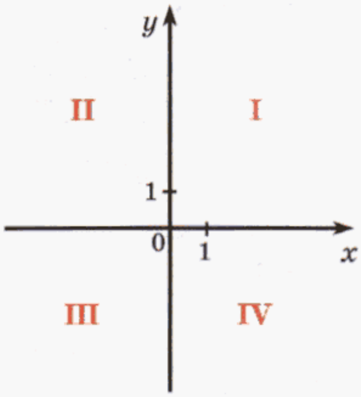


Рис. 4

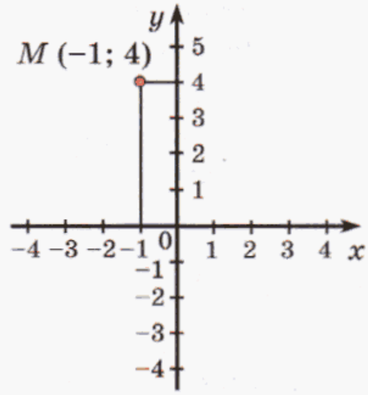


Рис. 5

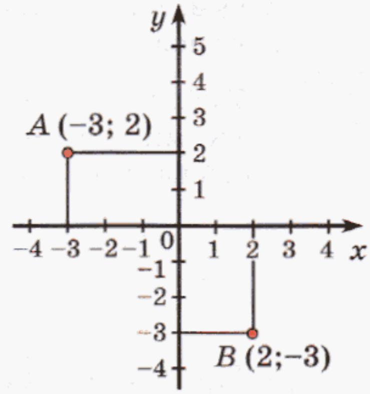


Рис. 6

Чтобы определить положение любой точки M на координатной плоскости, надо провести через нее прямые, перпендикулярные осям координат. Точка пересечения с осью x называется **абсциссой** точки M, а точка пересечения с осью y – **ординатой**. Так, абсцисса точки M на рис. 5 равна (-1), а ордината – $(+4)$. Абсциссу и ординату вместе называют **координатами** точки M. Обозначение координат точки на плоскости остается прежним, а именно: $M(-1; 4)$.

Заметим, что, как и в случае с координатным углом, изменение порядка координат меняет положение точки на плоскости. Например, на рис. 6 точка A имеет координаты $(-3; 2)$, а точка B – координаты $(2; -3)$.

Точки любой прямой, перпендикулярной оси абсцисс, имеют одинаковые абсциссы, а любой прямой, перпендикулярной оси ординат, – одинаковые ординаты. Например, все точки прямой a на рис. 7 имеют абсциссы, равные 2, а все точки прямой b на рис. 8 имеют ординаты, равные (-3).

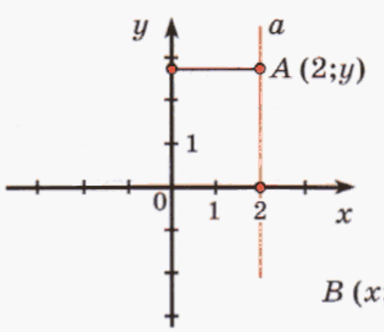


Рис. 7

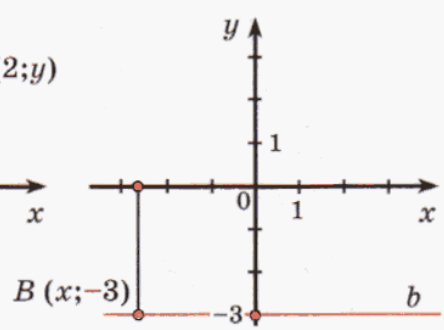


Рис. 8

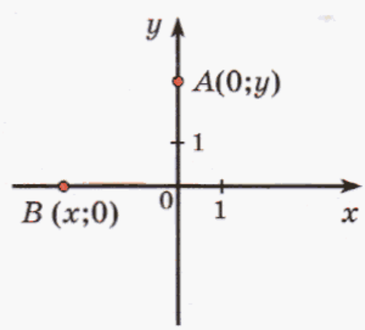


Рис. 9

Это остается верным и для самих осей координат Ox и Oy (рис. 9). Поскольку обе они проходят через начало отсчета $O\ (0; 0)$, то координаты любой точки оси абсцисс имеют вид $(x; 0)$, а координаты любой точки оси ординат – вид $(0; y)$.

Построить точку по ее координатам можно несколькими способами. Например, чтобы построить точку $C\ (-4;\ 2)$, можно провести через ее абсциссу (-4) и ординату 2 прямые, перпендикулярные осям координат, и найти точку пересечения этих прямых (рис. 10). А можно сначала сместиться по оси x влево на 4 единицы, а потом – параллельно оси y вверх на 2 единицы (рис. 11).

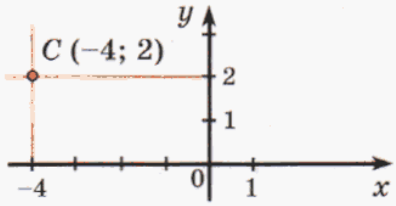


Рис. 10

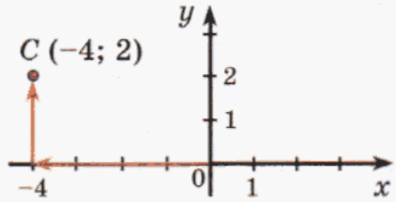


Рис. 11

Описанная система координат называется *прямоугольной*. Ее называют также *декартовой* в честь французского математика Рене Декарта (1596–1650 гг.). Существуют и другие системы координат на плоскости, например, *аффинная*, *полярная* и др.

К **168** Определи по рис. 12, сколько клеток надо пройти налево или направо, вверх или вниз, чтобы попасть из точки O в точки A, B, C, D.

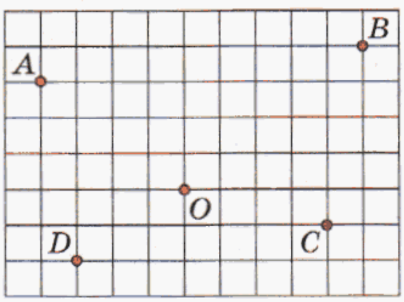


Рис. 12

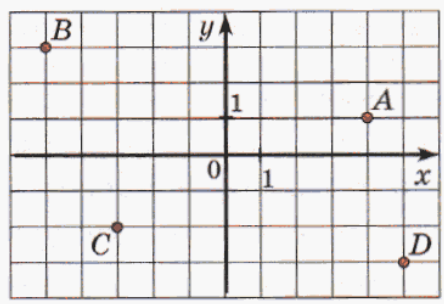


Рис. 13

169 Определи координаты точек A, B, C и D (рис. 13). Назови их абсциссы и ординаты. В каких координатных четвертях они расположены?

170 Точка M имеет абсциссу x и ординату y. Запиши координаты точки M. Определи знаки x и y, если M принадлежит I, II, III, IV координатной четверти.

171 Построй систему координат на плоскости и отметь точки $A\ (-3;\ 4)$, $B\ (9;\ 4)$, $C\ (9;\ -2)$ и $D\ (-3;\ -2)$. Что интересного в их расположении? Найди координаты точки пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$.

172 а) Где на координатной плоскости расположены точки с абсциссой, равной 0? Построй точки $A\ (0;\ -5)$, $B\ (0;\ -4)$, $C\ (0;\ -2)$, $D\ (0;\ 1)$ и $E\ (0;\ 5)$. Найди закономерность и запиши координаты следующей точки.
б) Построй точки $A\ (5;\ 0)$, $B\ (1;\ 0)$, $C\ (-2;\ 0)$, $D\ (-4;\ 0)$. Что ты замечаешь?
в) Какая точка имеет координаты $(0;\ 0)$?

173 а) Отметь на координатной плоскости несколько точек, абсцисса которых равна -2. Где расположены все такие точки?
б) Где расположены все точки координатной плоскости, ордината которых равна 3? Отметь несколько таких точек.

174 Построй треугольник ABC по координатам его вершин: а) $A\ (8;\ -6)$, $B\ (3;\ 4)$, $C\ (-6;\ 1)$; б) $A\ (-3;\ -2)$, $B\ (1;\ 6)$, $C\ (9;\ -6)$. Найди координаты точек пересечения сторон треугольника с осями координат.

175 Построй точки $A\ (-6;\ -3)$, $B\ (6;\ 1)$, $C\ (0;\ -1)$ и $D\ (3;\ 0)$. Что ты замечаешь? Проведи необходимые измерения и определи, в каком отношении делит отрезок AB точка C, точка D?

176 а) Построй прямые AB и CD, если $A\ (0;\ 8)$, $B\ (5;\ -2)$, $C\ (-6;\ 0)$, $D\ (4;\ 5)$. Найди координаты точки пересечения этих прямых. Что интересного в их расположении? Сколько точек пересечения могут иметь две различные прямые?
б) Построй окружность с центром в точке $A\ (-3;\ 1)$ и радиусом 4 единичных отрезка. Найди координаты точек пересечения этой окружности с прямой BC, если $B\ (-5;\ 7)$, $C\ (4;\ -2)$. Сколько точек пересечения могут иметь прямая и окружность?
в) Построй одну окружность с центром в точке $A\ (-2;\ -1)$ и радиусом 3 единичных отрезка, а вторую – с центром в точке $B\ (6;\ -1)$ и радиусом 5 единичных отрезков. Найди координаты их общей точки. Сколько точек пересечения могут иметь две окружности?

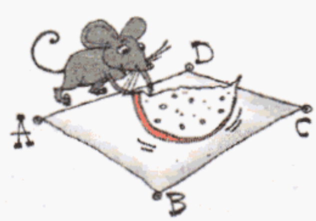
177 Построй четырехугольник $ABCD$, проведи необходимые измерения и определи его вид. Какие свойства этого четырехугольника тебе известны?

а) $A\ (-4;\ 0)$, $B\ (0;\ 6)$, $C\ (3;\ 4)$, $D\ (-1;\ -2)$;

б) $A\ (1;\ 4)$, $B\ (4;\ 0)$, $C\ (0;\ -3)$, $D\ (-3;\ 1)$;

в) $A\ (-6;\ 1)$, $B\ (0;\ 3)$, $C\ (2;\ 0)$, $D\ (-4;\ -2)$;

г) $A\ (3;\ 0)$, $B\ (0;\ -2)$, $C\ (-4;\ 0)$, $D\ (2;\ 4)$.



178 Построй замкнутую ломаную линию по координатам ее вершин:

$A_1\ (10;\ 10)$, $A_2\ (9;\ 12)$, $A_3\ (12;\ 12)$, $A_4\ (13;\ 10)$, $A_5\ (12;\ 10)$, $A_6\ (12;\ 7)$, $A_7\ (9;\ 5)$, $A_8\ (5;\ 4)$, $A_9\ (2;\ 1)$, $A_{10}\ (-4;\ -2)$, $A_{11}\ (-3;\ -3)$, $A_{12}\ (13;\ -1)$, $A_{13}\ (15;\ 0)$, $A_{14}\ (13;\ -2)$, $A_{15}\ (-12;\ -5)$, $A_{16}\ (-13;\ -4)$, $A_{17}\ (-5;\ -3)$, $A_{18}\ (-5;\ -1)$, $A_{19}\ (-1;\ 3)$, $A_{20}\ (3;\ 5)$, $A_{21}\ (6;\ 7)$, $A_{22}\ (8;\ 9)$, $A_{23}\ (5;\ 8)$, $A_{24}\ (2;\ 6)$, $A_{25}\ (1;\ 7)$, $A_{26}\ (4;\ 9)$, $A_{27}\ (8;\ 10)$, A_1.

Что получилось?

179 Построй на координатной плоскости две окружности: одну – с центром в точке $A\ (-1;\ 0)$ и радиусом 3 единичных отрезка, а вторую – с центром в точке $B\ (1;\ 5)$ и радиусом 4 единичных отрезка. Найди приближенное значение координат точек пересечения этих окружностей (1 ед. отр. = 1 см).

180 На миллиметровой бумаге отмечены точки A, B, C, D, E и F (рис. 14). Найди их координаты.

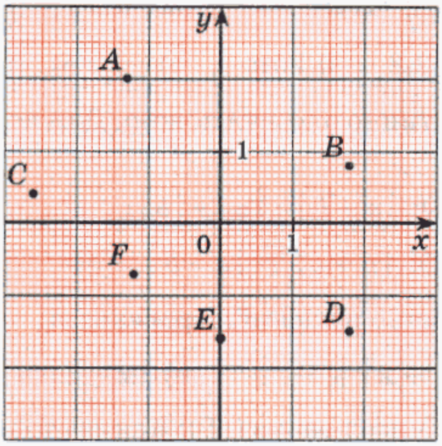


Рис. 14

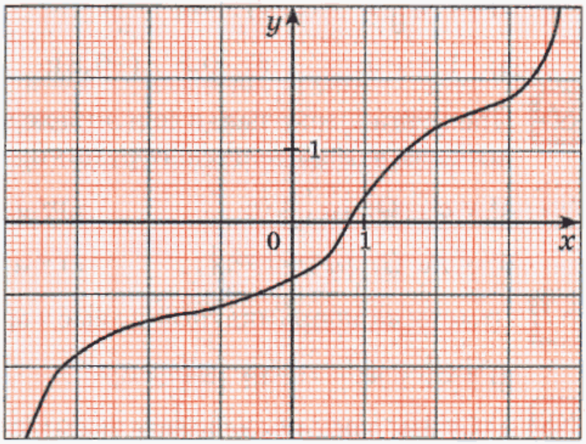


Рис. 15

181 На координатной плоскости проведена линия (рис. 15). Найди на этой линии точку: а) абсцисса которой равна: –3,4; –2,5; –1,8; –0,6; 0; 0,7; 1,5; 2,9; 3,6; б) ордината которой равна: 2,3; 1,6; 0,8; 0; –0,4; –0,7; –1,9; –2,4; – 2,8.

182 Построй на миллиметровой бумаге координатную плоскость и проведи окружность с центром в начале координат и радиусом 3,5 единичных отрезка. Найди на окружности точки:

а) абсцисса которых равна: –2,8; –0,5; 1,9;

б) ордината которых равна: –2,8; –0,5; 1,9. Что ты замечаешь?

183 На миллиметровой бумаге проведи прямые AB и CD и найди координаты точки их пересечения, если:

а) $A(-1{,}2;\ 5{,}6)$, $B(6{,}4;\ -0{,}8)$, $C(-1{,}2;\ -1{,}8)$, $D(4{,}9;\ 1{,}5)$;

б) $A(2{,}4;\ 5{,}1)$, $B(-3{,}6;\ -0{,}8)$, $C(4{,}5;\ -1{,}3)$, $D(-2{,}7;\ 3{,}9)$.

184 В таблице приведены данные об изменении температуры воды в чайнике в зависимости от времени:

Время t (мин)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Температура воды T (°C)	20	36	52	68	84	100	100	100	98	95	90	84

Построй на миллиметровой бумаге график этой зависимости, откладывая по оси абсцисс время в минутах, а по оси ординат – температуру воды в градусах Цельсия (1 см – 1 мин, 1 см – 10 °C). Определи по графику:

1) Сколько времени потребовалось, чтобы довести температуру воды в чайнике до 50°, 75°, до кипения (100°)?

2) Сколько времени кипела вода в чайнике?

3) В какие моменты времени температура воды в чайнике была равна 90°?

185 Вычисли устно:

а) $-1+\frac{2}{9}$; в) $-0{,}9-\frac{1}{2}$; д) $-\frac{3}{7}\cdot 1{,}4$; ж) $0{,}3:\left(-\frac{1}{3}\right)$;

б) $-1{,}6+4$; г) $-0{,}8-(-0{,}8)$; е) $-2{,}8\cdot(-0{,}25)$; з) $(-2:5):(-0{,}4)$.

186 Прочитай высказывание и определи, истинно оно или ложно. Для ложных высказываний построй отрицания:

а) $\forall\, a \in Q$: $|a| \geqslant 0$; в) $\forall\, a, b \in Q$: $|a+b| = |a| + |b|$;

б) $\exists\, a \in Q$: $|a| = |-a|$; г) $\exists\, a, b \in Q$: $|a+b| \geqslant |a-b|$.

187 Отметь на координатной прямой множество решений неравенства:

а) $|x| < 4$; б) $|x| \geqslant 3$; в) $|x+2| \leqslant 1$; г) $|x-1| > 2$.

188 а) Сумма трех последовательных целых чисел равна (-9). Какие это числа?
б) Найди пять последовательных целых чисел, сумма которых равна 5.

189 Выполни деление с остатком и сделай проверку, используя формулу $a = bc + r$, $r < b$:

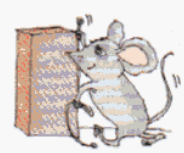
а) $25:8$; в) $51:9$; д) $38:3$; ж) $60:18$;

б) $32:5$; г) $45:6$; е) $75:4$; з) $82:15$.

190 а) Сумма двух чисел равна 130. При делении большего из них на меньшее в частном получается 3 и в остатке 2. Чему равна разность этих чисел?
б) Разность двух чисел равна 75. При делении большего на меньшее в частном получается 7 и в остатке 3. Чему равна их сумма?

191 Составь выражение и найди его значение, если $a = -1{,}5$; $b = -\frac{1}{2}$:

а) разность числа a и квадрата числа b;
б) разность квадратов чисел a и b;
в) квадрат разности чисел a и b;
г) частное квадрата числа a и куба числа b;
д) число, обратное сумме квадратов чисел a и b;
е) число, противоположное квадрату суммы чисел a и b.



192 Найди значения выражений:

а) $-40:(-5)-2\cdot(-6)$; в) $-9\cdot 5-5\cdot(36:(-6)-4)$; д) $(-2)^3-(-3)^2$;

б) $(4-32):(-7)-12$; г) $(-15-(-18):(-2)):(-8)$; е) $(-1)^{2008}-(-1)^{2007}$.

193 Найди неизвестный член пропорции:

а) $\frac{-1{,}7}{x}=\frac{5{,}1}{-1{,}8}$; б) $\frac{-0{,}35}{-\frac{1}{2}}=\frac{-0{,}5}{x}$; в) $\frac{4\frac{1}{3}}{x}=\frac{-2{,}6}{0{,}09}$; г) $\frac{-6\frac{2}{9}}{1{,}6}=\frac{x}{-1\frac{2}{7}}$.

194 а) Какие зависимости между величинами называются прямой и обратной пропорциональностью? Приведи примеры этих зависимостей и запиши их формулы.

б) Какие из приведенных ниже зависимостей между величинами являются прямой пропорциональностью, обратной пропорциональностью или не являются ни тем, ни другим?

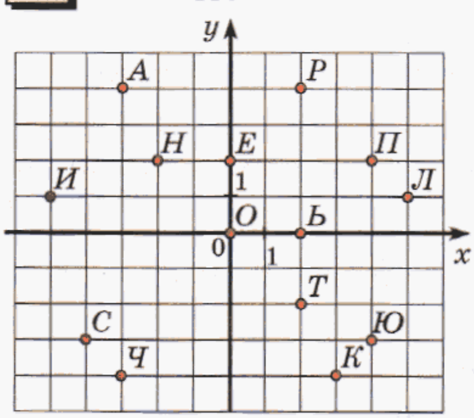
1 $t = \frac{40}{v}$	**4** $C = \frac{2n}{5}$	**7** $S = a^2$
2 $s = 7t$	**5** $P = 4a$	**8** $m = 2 + n$
3 $A = \frac{1}{3}v$	**6** $a = 1{,}2 : b$	**9** $xy = 5$

195 Определи вид зависимости между величинами и реши задачи:

а) Тракторист должен был вспахать поле за 5 дней. Но он обрабатывал в день на 2 га больше, чем предполагал, и поэтому закончил работу на день раньше. Чему равна площадь поля, если тракторист работал равномерно?

б) Пешеход за 40 мин прошел 30% всего пути, а еще через час ему осталось пройти всего 3 км. С какой скоростью он шел, если скорость его была постоянной?

Д **196** Расшифруй имена известных ученых. Прочитай о них в энциклопедии.



(−2; 2)	(2; 0)	(4; −3)	(2; −2)	(0; 0)	(−2; 2)

(4; 2)	(−3; 4)	(−4; −3)	(3; −4)	(−3; 4)	(5; 1)	(2; 0)

(2; −2)	(0; 0)	(2; 4)	(2; 4)	(−5; 1)	(−3; −4)	(0; 2)	(5; 1)	(5; 1)	(−5; 1)

197 а) Построй ломаную линию по координатам ее вершин. Что получилось?

A_1 (0; −1), A_2 (−4; −1), A_3 (−4; 0), A_4 (−5; 1), A_5 (−4; 2), A_6 (−5; 3), A_7 (−4; 4), A_8 (−5; 5), A_9 (−4; 6), A_{10} (−5; 7), A_{11} (−4; 8), A_{12} (−5; 9), A_{13} (−4; 10), A_{14} (−5; 11), A_{15} (−4; 12), A_{16} (−3; 11), A_{17} (−1; 13), A_{18} (0; 11), A_{19} (2; 12), A_{20} (2; 11), A_{21} (4; 11), A_{22} (0; 9), A_{23} (0; −1), A_{24} (2; −1), A_{25} (2; −2), A_{26} (4; −2), A_{27} (4; −1), A_{28} (3; −1), A_{29} (2; 0), A_{30} (2; 6), A_{31} (4; 7), A_{32} (3; 8), A_{33} (3; 9), A_{34} (2; 10).

б) Начерти на координатной плоскости фигуру, составленную из ломаных линий, и закодируй ее с помощью координат.

198 В таблице приведены данные об изменении роста сосны в зависимости от ее возраста.

Возраст сосны t (в годах)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Высота сосны h (в метрах)	0	2,8	5,6	8,2	10,6	13	14,8	16	16,4	17,2	17,6

Построй на миллиметровой бумаге график этой зависимости и определи по графику:

а) высоту сосны в 25 лет, 42 года, 76 лет, 84 года;

б) возраст сосны, когда ее высота была 5 м, 10 м, 15 м, 17 м;

в) на сколько метров выросла сосна за первые 15 лет, с 55 до 70 лет?

199 Сумма трех последовательных целых чисел равна (−6). Чему равно их произведение?

200 Сумма двух чисел равна 100. При делении большего из них на меньшее в частном получается 5 и в остатке 10. Меньшее число увеличили на треть, а большее – уменьшили на 20%. Чему теперь равны частное и остаток от деления большего числа на меньшее?

201 Составь выражение и найди его значение, если $a = -\dfrac{1}{2}$; $b = 0{,}5$; $c = -1$:

а) произведение квадрата суммы чисел a и b и куба разности чисел a и c;

б) частное удвоенного куба числа a и разности квадратов чисел b и c.

202 Реши задачи способом пропорций:

а) Мотоциклист проехал за некоторое время расстояние 43,2 км. Если он увеличит скорость на 2 км/ч, то за это же время проедет на 4,8 км больше. С какой скоростью ехал мотоциклист?

б) Цена тетради снизилась на 2 рубля. Теперь за 80 тетрадей надо заплатить столько же, сколько раньше за 70 тетрадей. Чему равна новая цена тетради?

203 На сколько процентов число A больше числа B:

$A = (20{,}6 \cdot 4{,}5 + 7{,}35) \cdot (166{,}116 : 32{,}7) - 498{,}264;$

$B = (-1{,}632 : (-0{,}8) + 15{,}5 \cdot (-0{,}4) - 3{,}573) : 3{,}7 + 11{,}09.$

204 Найди значение выражения:

$$\frac{-3\frac{1}{3} \cdot \left(-2\frac{4}{15}\right) : \frac{-6{,}8}{0{,}9} - 1\frac{7}{9} \cdot (-0{,}75) : \left(-\frac{1}{6}\right)}{-8\frac{1}{3} \cdot 16{,}2 : (-22{,}5)}.$$

C **205** Из дома в школу Саша вышел на 3 мин позже своей сестры, но шел в 1,5 раза быстрее нее. Через сколько минут он ее догнал?

206 Докажи, что если к трехзначному числу приписать справа (или слева) то же самое число, то полученное шестизначное число будет кратно 11.

207 Когда трехзначное число, у которого цифры сотен и десятков одинаковые, а цифра единиц равна 5, разделили на однозначное число, то в остатке получили 8. Чему равны делимое, делитель и частное?

2. Графики зависимостей величин.

Мы уже много раз наблюдали, как знание общих свойств зависимостей между величинами помогает решать практические задачи. Например, выявление общих свойств зависимостей между такими величинами, как «расстояние – скорость – время», «стоимость – цена – количество товара», «объем выполненной работы – производительность – время», привело к построению зависимостей общего вида – прямой пропорциональности ($y = kx$) и обратной пропорциональности $\left(y = \dfrac{k}{x}\right)$. А это помогло построить способ решения задач с помощью пропорций.

Зависимости между величинами выражаются на математическом языке с помощью формул, таблиц и графиков. Введение системы координат на плоскости позволяет сопоставить каждой точке ее координаты, которые могут быть как положительными, так и отрицательными числами. Самый простой пример – график изменения температуры в зависимости от времени, когда температура может принимать отрицательные значения.

Приведем еще один пример зависимости, связанной с изменением температуры. Вспомним, что на градусниках, которыми мы пользуемся, обычно стоит значок $^\circ C$, который означает, что этим градусником температура измеряется «по Цельсию». Между тем во многих странах, в частности в США и в Англии, используется другая шкала измерения температуры – шкала Фаренгейта, отмечаемая знаком $^\circ F$. Совершенно естественно возникает задача – как по одной из этих температур узнать другую.

Сопоставляя шкалу измерения температур по Цельсию со шкалой по Фаренгейту, можно вывести общую формулу зависимости между величинами y – температурой по Цельсию и x – температурой по Фаренгейту:

$$y = \frac{5}{9}(x - 32).$$

Полученная формула позволяет по любому данному значению x найти соответствующее значение y и построить график этой зависимости (рис. 16):

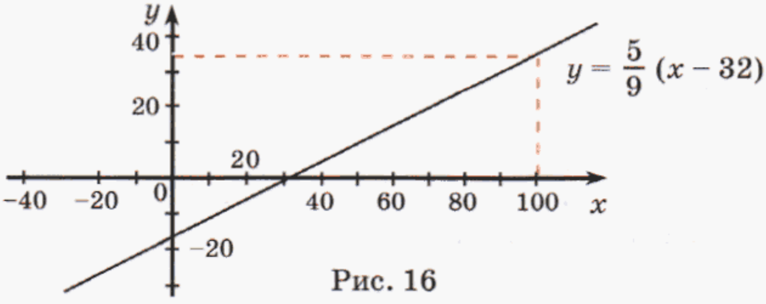


Рис. 16

Несмотря на кажущуюся абстрактность математических вычислений и графиков, в повседневной жизни очень часто возникают ситуации, в которых использование математики имеет практическое значение.

Например, из приведенной выше формулы следует, что если $y = 37$, то

$5(x - 32) = 333$, $x = 32 + 66{,}6 = 98{,}6$.

Значит, при температуре около $100\ ^\circ F$ или больше у человека есть все основания побеспокоиться о своем здоровье. Это число полезно помнить каждому туристу, заболевшему в англоязычной стране.

Приведенный пример показывает, как разнообразные математические понятия – отрицательные числа, координатная плоскость, формулы, графики, – возникшие из внутренней логики развития самой математики, оказываются практически значимыми.

Следующим важным шагом в развитии этих понятий является выявление и изучение общих свойств зависимостей между величинами. Исследование этих зависимостей помогает ***прогнозировать*** события, или, иначе говоря, помогает найти ответ на вопрос: «Что будет происходить при тех или иных обстоятельствах?»

На рис. 17 приведены графики трех зависимостей переменной y от переменной x. Первые две зависимости обладают тем свойством, что каждому значению x сопоставляется ***единственное*** значение y, а третья зависимость этим свойством не обладает (контрпример показан на чертеже). Таким образом, в первых двух случаях можно говорить об однозначном характере зависимостей, что позволяет на практике прогнозировать развитие событий. А в третьем случае этой возможности нет.

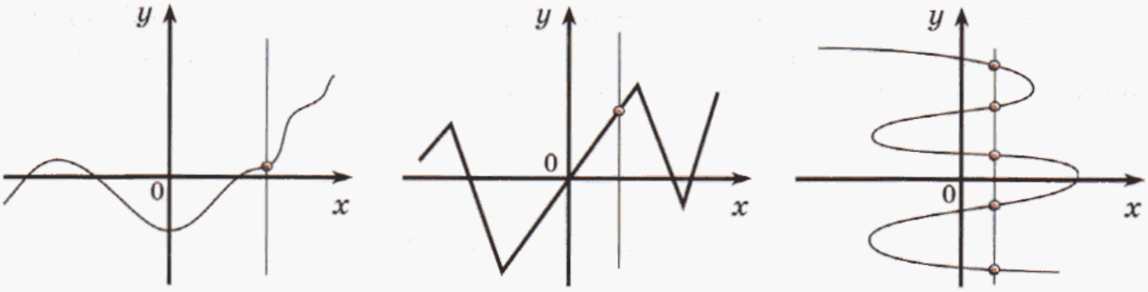


Рис. 17

Зависимость переменной y от переменной x, при которой каждому значению x соответствует единственное значение y, стали называть ***функциональной зависимостью***, или ***функцией***.

Формирование понятия функции, начавшееся еще в XVI – XVII веках, придало мощный импульс развитию всех наук, которое мы наблюдаем до настоящего времени.

208 У одного из крупнейших современных писателей-фантастов Рея Бредбери есть книга под названием «451° по Фаренгейту», где речь идет о варварском процессе сжигания книг. Определи с точностью до десятых, о какой температуре по Цельсию идет речь в названии этой книги.

209 Пользуясь формулой $y = \frac{5}{9}(x - 32)$, где y – температура по Цельсию, а x – температура по Фаренгейту, определи с точностью до единиц:

а) y, если $x = 0;\ 5;\ 32;\ 110;\ -4;\ -9;\ -300;$

б) x, если $y = 0;\ 10;\ 25;\ 100;\ -40;\ -5{,}8;\ -273{,}1.$

210 По таблице установи формулу зависимости между переменными y и x и построй график этой зависимости на координатной плоскости. Какие из этих зависимостей являются функциональными? Какие из них являются прямой пропорциональностью, обратной пропорциональностью?

а)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	8	6	4	2	0	-2	-4	-6	-8

б)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	4	3	2	1	0	1	2	3	4

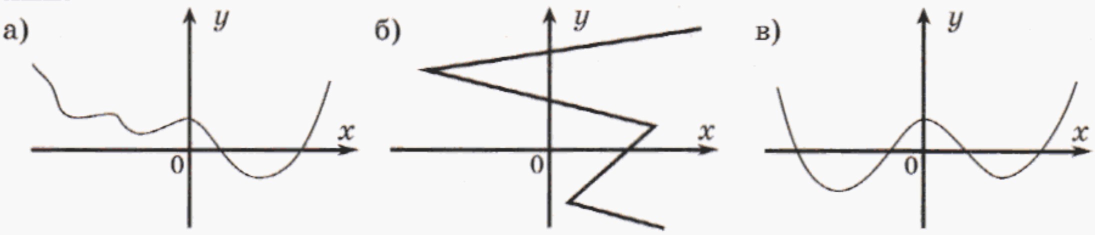
в)

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

г)

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
y	9	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9

211 Какие из зависимостей y от x, приведенных на рисунке, являются функциями:



212 Построй на одной координатной плоскости графики трех данных зависимостей y от x:

а) $y = \frac{1}{3}x,\quad y = x\quad$ и $\quad y = 3x;$ б) $y = 2x,\quad y = 2x + 3\quad$ и $\quad y = 2x - 1.$

Что ты наблюдаешь? Сформулируй *гипотезу*.

213 Построй на одной координатной плоскости графики зависимостей вида $y = kx$, если: а) $k = 2$ и $k = -2$; б) $k = 1$ и $k = -1$; в) $k = 2{,}5$ и $k = -2{,}5$.
Что ты наблюдаешь? Сформулируй *гипотезу*.

214 Построй на одной координатной плоскости графики зависимостей вида $y = kx^2$, если: а) $k = 1$, $k = \frac{1}{2}$ и $k = 2$; б) $k = 1$ и $k = -1$; в) $k = 2$ и $k = -2$.

Что ты замечаешь? Сформулируй *гипотезу*.

215 Вычисли устно:

а) $-0,1 + 0,3$; в) $0 - (-3,5)$; д) $0,125 \cdot (-4)$; ж) $(-0,2)^2$;

б) $1\frac{1}{3} - 2$; г) $-0,6 - \frac{2}{5}$; е) $-1 : (-\frac{3}{7})$; з) $-\frac{(-5)^3}{(-5)^2}$.

216 Зависимость между переменными величинами y и x задана с помощью формулы: а) $y = \frac{k}{x}$; б) $y = ax^2 + bx + c$. Приведи несколько примеров таких зависимостей.

217 Запиши зависимости между величинами с помощью обобщенной формулы:

а) $y = 3x^2$, $y = -\frac{1}{2}x^2$, $y = 1,4x^2$, $y = -0,05x^2$, $y = x^2$;

б) $y = 5x - 4$, $y = -2x + 6$, $y = x + 9$, $y = -0,8x$, $y = -\frac{1}{3}x - 1,5$.

218 Составь выражение и найди его значение, если $a = -0,2$; $b = \frac{1}{2}$; $c = -\frac{1}{3}$:

а) частное числа a и разности квадратов чисел b и c;

б) произведение утроенного числа a и квадрата разности чисел b и c;

в) разность удвоенного произведения квадратов чисел a и b и утроенного числа c;

г) число, противоположное квадрату суммы утроенного числа a и частного чисел b и c.

219 Запиши выражение в виде дроби и, если возможно, сократи:

а) $-\frac{2x}{15} - \frac{x}{6}$; б) $y - \frac{2}{3y}$ $(y \neq 0)$; в) $\frac{10}{n^3} : \frac{2}{-n^2}$ $(n \neq 0)$; г) $\frac{-4b}{m^3} : \frac{20b^2}{m^2}$ $(b, m \neq 0)$.

220 Прочитай высказывание и определи, истинно оно или ложно. Для ложных высказываний построй отрицания:

а) $\exists\, a \in Q$: $|a| < 0$; в) $\exists\, a, b \in Q$: $|a + b| = |a| + |b|$;

б) $\forall a \in Q$: $|a| = |-a|$; г) $\forall a, b \in Q$: $|a + b| \geqslant |a - b|$.

221 Отметь на координатной прямой множество решений неравенства:

а) $|x| \leqslant 5$; б) $|x| > 2$; в) $|x - 1| < 3$; г) $|x + 2| \geqslant 1$.

222 Пешеход рассчитал, что, двигаясь с определенной скоростью, пройдет намеченный путь за 3 ч 50 мин. Но, увеличив эту скорость на 1 км/ч, он прошел этот путь за 3 ч. Чему равна длина пути?

223 Расстояние между двумя пристанями на озере катер проплывает по расписанию за 2 ч 30 мин. Через час после отправления из-за штормовой погоды он снизил скорость на 10 км/ч и поэтому в пункт назначения прибыл с опозданием на полчаса. С какой первоначальной скоростью плыл катер?

D **224** Пользуясь формулой $y = 0{,}5x - 4$, определи:

а) y, если $x = 0;\ 15{,}6;\ -12{,}8$; б) x, если $y = 9{,}8;\ -0{,}5;\ -6$.

225 Построй на одной координатной плоскости графики зависимостей: $y = -2x$, $y = -2x + 1$ и $y = -2x - 3$. Что ты наблюдаешь? Сформулируй *гипотезу*.

226 Построй на одной координатной плоскости графики зависимости $y = kx$, если $k = -\frac{1}{3}$, $k = -1$ и $k = -3$. Что ты наблюдаешь? Сформулируй *гипотезу*.

227 Запиши выражение в виде дроби и, если возможно, сократи ($a, c, n, x \neq 0$):

а) $-\frac{a}{4} + \frac{a}{12}$; б) $-\frac{2b}{c} - \frac{c}{2}$; в) $-\frac{n^2}{ax} \cdot \left(-\frac{a^2}{n}\right)$; г) $-\frac{3}{c} : \frac{6}{c^2}$.

228 Расстояние от дома до школы Петя проходит пешком за треть часа, а на велосипеде проезжает за 8 мин. На каком расстоянии от школы он живет, если его скорость на велосипеде на 9 км/ч больше, чем скорость пешком?

229 Найди значение выражения:

$$\frac{\left(4{,}5 \cdot 1\frac{2}{3} - 6{,}75\right) \cdot \frac{2}{3}}{\left(3\frac{1}{3} \cdot 0{,}3 + 5\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}\right) : 2\frac{2}{3}} + \frac{1\frac{4}{11} \cdot 0{,}22 : 0{,}3 - 0{,}96}{\left(0{,}2 - \frac{3}{40}\right) \cdot 1{,}6}.$$

C **230** Существуют ли такие натуральные числа m и n, что $0 < \frac{m}{13} - \frac{n}{8} < 0{,}01$. А если 0,01 заменить на 0,005?

§ 5. Логическое следование

1. Понятие логического следования.

В этом пункте мы рассмотрим одно из основных логических понятий – понятие *следования*. В русском языке ему соответствует чаще всего предложение с союзом «если..., то...». Например, «***Если*** где-то идет дождь, ***то*** земля в этом месте и в это время мокрая».

Такие предложения обычно можно заменить предложением с глаголом «следовать». Например, можно сказать: «Из того, что где-то идет дождь, ***следует***, что земля в этом месте и в это время мокрая». Правда, такое предложение с точки зрения литературного языка является несколько искусственным и в обычной речи почти не встречается.

Несмотря на то что в этом предложении нет ни одного «общего» слова, оно *является общим высказыванием*, поскольку имеется в виду именно общее свойство: каждый раз, когда идет дождь, в этом месте земля мокрая.

Это верно и для математических высказываний. Когда мы говорим, например: «Если натуральное число оканчивается цифрой 5, то оно делится на 5», мы имеем в виду общий факт – любое натуральное число, оканчивающееся цифрой 5, делится на 5. Это же предложение можно переформулировать с использованием глагола «следовать»: из того, что натуральное число оканчивается цифрой 5, ***следует***, что оно делится на 5.

Аналогично можно переформулировать и другие предложения, независимо от того, истинные они или ложные:

№	***Если..., то...***	***Из того, что..., следует, что...***
1а	*Если* натуральное число делится на 9, *то* оно делится на 3.	*Из того, что* натуральное число делится на 9, *следует*, *что* оно делится на 3.
1б	*Если* натуральное число делится на 3, *то* оно делится на 9.	*Из того, что* натуральное число делится на 3, *следует*, *что* оно делится на 9.
2а	*Если* дробь правильная, *то* обратная к ней дробь неправильная.	*Из того, что* дробь правильная, *следует*, *что* обратная к ней дробь неправильная.
2б	*Если* дробь неправильная, *то* обратная к ней дробь правильная.	*Из того, что* дробь неправильная, *следует*, *что* обратная к ней дробь правильная.
3а	*Если* число больше 8, *то* оно больше или равно 9.	*Из того, что* число больше 8, *следует*, *что* оно больше или равно 9.
3б	*Если* число больше или равно 9, *то* оно больше 8.	*Из того, что* число больше или равно 9, *следует*, *что* оно больше 8.
4а	*Если* $x = 2$, *то* $x^5 = 32$.	*Из того, что* $x = 2$, *следует*, *что* $x^5 = 32$.
4б	*Если* $x^5 = 32$, *то* $x = 2$.	*Из того, что* $x^5 = 32$, *следует*, *что* $x = 2$.

С точки зрения русского языка предложения в правой колонке являются довольно искусственными, однако они часто бывают удобными для их перевода на математический язык. Для краткой записи этих предложений в математике имеется специальный знак $\Rightarrow$ – *знак следования*. Рассмотрим, как записываются с помощью этого знака предложения 1а и 1б:

1 а) n делится на $9 \Rightarrow n$ делится на 3 $(n \in N)$,

б) n делится на $3 \Rightarrow n$ делится на 9 $(n \in N)$.

Мы ввели переменную n, записали *условие* «n делится на 9», поставили знак $\Rightarrow$, после которого поставили *заключение* «n делится на 3». При этом мы использовали ту же букву n, так как в заключении местоимение «оно» означает, что речь идет *о том же натуральном числе*, что и в условии.

В конце мы записали $n \in N$, то есть что n – натуральное число. Этим мы подчеркиваем, что слово «делится» употребляется у нас только для натуральных чисел.

Аналогично мы поступаем и в других примерах.

2 а) $\frac{m}{n} < 1 \;\Rightarrow\; \frac{n}{m} \geqslant 1 \; (m, n \in N)$, б) $\frac{n}{m} \geqslant 1 \;\Rightarrow\; \frac{m}{n} < 1 \; (m, n \in N)$.

3 а) $a > 8 \;\Rightarrow\; a \geqslant 9$, б) $a \geqslant 9 \;\Rightarrow\; a > 8$.

4 а) $x = 2 \;\Rightarrow\; x^5 = 32$, б) $x^5 = 32 \;\Rightarrow\; x = 2$.

В последних двух примерах мы не указали множество значений переменной. В таких случаях предполагается, что переменная принимает значения из множества всех уже известных нам чисел, то есть из множества рациональных чисел.

Таким образом, мы видим, что знак следования $\Rightarrow$ соединяет два предложения с переменными и образует новое *высказывание* общего вида: из первого предложения *следует* второе. Первое предложение назовем *условием*, а второе – *заключением*, или *следствием*, первого.

Запись вида $P \Rightarrow Q$ будем называть **логическим следованием.** Эту запись можно читать так:

«Если *P*, то *Q*»,

или так:

«Из *P* следует *Q*», **«*Q* есть следствие *P*»**.

Иногда вместо слова «следует» говорят более образно – «вытекает», и тогда знак $\Rightarrow$ показывает «направление течения»: из первого предложения «вытекает» второе.

К **231** Сформулируй предложения, используя глагол «следует»:

а) *если* животное млекопитающее, *то* оно кормит детей молоком;

б) *если* вода превратилась в лед, *то* ее температура меньше или равна нулю.

232 Прочитай предложения и назови условие и заключение. Что ты замечаешь?

а) *Если* натуральное число оканчивается на 0, *то* оно кратно 5.

б) *Если* число кратно 5, *то* оно оканчивается на 0.

в) *Если* сумма цифр натурального числа делится на 3, *то* и само число делится на 3.

г) *Если* число делится на 3, *то* и сумма его цифр делится на 3.

д) *Если* каждое слагаемое делится на некоторое число, *то* их сумма тоже делится на это число.

е) *Если* сумма чисел делится на некоторое число, *то* и каждое слагаемое делится на это число.

233 Прочитай высказывания и определи, истинны они или ложны. В каких высказываниях условие и заключение поменялись местами?

а) n кратно 8 $\Rightarrow$ n кратно 4; в) $a > b \Rightarrow b < a$;

б) n кратно 4 $\Rightarrow$ n кратно 8; г) $a \leqslant b \Rightarrow b \geqslant a$.

234 Сформулируй высказывания с использованием союза «*если…, то…*» и запиши их на математическом языке.

а) Число, противоположное отрицательному, положительно.

б) Произведение правильных дробей является правильной дробью.

в) Параллельные прямые не пересекаются.

г) Вертикальные углы равны.

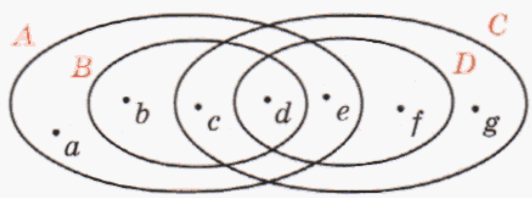
235 Придумай предложение, являющееся логическим следованием, и запиши его на математическом языке.

236 Вычисли устно и продолжи ряд ответов на одно число, сохраняя закономерность:

-7	-12	-3	$2{,}8$	$-2{,}4$
$:0{,}1$	$\cdot 10$	$:(-4)$	$+5{,}2$	$\cdot 0{,}5$
$+40$	$+270$	$+0{,}15$	$:0{,}2$	$+4$
$\cdot 0{,}09$	$:(-30)$	$\cdot(-2)$	-50	$\cdot(-0{,}1)$
$-1{,}6$	$+1{,}6$	$-0{,}7$	$+8{,}4$	$:0{,}4$

?

237 Пусть A – множество чисел, кратных 5, B – множество чисел, кратных 10, C – множество чисел, кратных 3, и D – множество чисел, кратных 9. На диаграмме Эйлера–Венна точками обозначены элементы множеств A, B, C и D, являющиеся трехзначными числами. Придай возможные значения переменным a, b, c, d, e, f и g.



238 Найди истинные высказывания и составь из соответствующих им букв имя древнегреческого философа, которого считают основоположником науки логики:

Э 815 кратно 3;

Т 815 делится на 5;

О 1536 не делится на 9;

П 1536 не кратно 4;

Т 52 704 делится на 2 и на 9;

Е 52 704 кратно 18;

Н 14 625 не кратно 3 или 25;

Л 75 является делителем 14 625;

Д $712 \cdot 15 + 340$ не кратно 5;

Ь $10\,800 - 63 \cdot 47$ делится на 9;

А $325 \cdot 120 \cdot 79$ кратно 10;

М $325 \cdot 120 \cdot 79$ не делится на 200;

Р 9 является делителем 438^2;

И 405^2 делится на 25 и на 81;

С 246^3 кратно 8;

Х $210^2 - 60^2$ не делится на 100.

239 Упрости выражение, найди его коэффициент и буквенную часть:

а) $5a \cdot (-1{,}8b)$; в) $-3m \cdot \frac{1}{3}k \cdot 1{,}5m$; д) $-\frac{2}{9}ab \cdot 1{,}8b \cdot (-2{,}5a^2)$;

б) $-4n \cdot (-0{,}7xy)$; г) $\frac{3}{4}c \cdot (-1{,}6d) \cdot (-0{,}5c)$; е) $2x \cdot \left(-\frac{5}{13}x^2y\right) \cdot 1{,}3xz^2$.

240 На дискотеке девочек было на 6 больше, чем мальчиков. Если число девочек увеличить на 100%, а число мальчиков увеличить на 150%, то девочек и мальчиков станет поровну. Сколько девочек и сколько мальчиков было на дискотеке?

241 Найди значения выражений:

а) $-3\left(\frac{5}{6}k + \frac{1}{3}\right) + 5(1{,}2k - 0{,}8)$, если $k = -\frac{2}{7}$;

б) $a(4a - 0{,}9b) - b(1{,}6a - 3b) - 1{,}5(a^2 + 2b^2)$, если $a = -0{,}6$; $b = -2{,}6$.

Д **242** Запиши высказывание на математическом языке с помощью знака $\Rightarrow$, подчеркни условие одной чертой, а заключение – двумя. Найди ложные высказывания. Как их опровергнуть?

а) Произведение двух отрицательных чисел положительно.

б) Сумма двух правильных дробей является правильной дробью.

в) Разность двух целых чисел является целым числом.

г) Частное двух рациональных чисел – число рациональное.

243 На мороженое Аня истратила $\frac{4}{15}$ имевшихся у нее денег, а на блокнот – $\frac{3}{11}$ остатка. Сколько денег у нее осталось после этого, если за блокнот она заплатила 6 рублей?

244 Увеличь число на 40%:

$$\frac{\left(6{,}829 + \frac{14}{15} \cdot 0{,}7 - \left(5{,}629 - \frac{14}{15} \cdot 2{,}3\right)\right) - (-0{,}3)^2 \cdot 16\frac{2}{3}}{-1{,}25 : \left(-\frac{5}{12}\right) + 6 : 3\frac{11}{13} + 5{,}684 : (-1{,}4)}.$$

С **245** Запиши в десятичной системе счисления числа: 1010101_2, 1212_3, 3210_4, 4040_5, 20406_7, 1234_{12}, 500_{56}.

2. Отрицание следования.

Итак, из того, что где-то идет дождь, *следует*, что земля в этом месте и в это время мокрая. С другой стороны, каждому понятно, что если земля мокрая, то отсюда вовсе *не следует*, что в это время и в этом месте идет дождь: вполне может оказаться, что землю здесь специально полили.

Другими словами, для обоснования высказывания «Из того, что земля мокрая, *не следует*, что идет дождь» мы приводим пример ситуации, когда условие «земля мокрая» истинно, а заключение «идет дождь» ложно.

Это верно и для математических предложений. Например, из того, что n делится на 5, *не следует*, что n оканчивается цифрой 5. Ведь число 10 делится на 5, но не оканчивается на 5.

Мы видим, что для обоснования предложения со словами «не следует» достаточно привести пример, когда условие истинно, а заключение ложно. Это и понятно: мы уже говорили, что предложение со словом «следует» является общим высказыванием, а чтобы доказать, что общее высказывание ложно, достаточно привести хотя бы один *контрпример*. Еще раз подчеркнем, что **для этого контрпримера условие должно быть истинным, а заключение ложным.**

Среди примеров, рассмотренных в предыдущем пункте, имеются как истинные, так и ложные высказывания:

1а	1б	2а	2б	3а	3б	4а	4б
И	**Л**	**И**	**Л**	**Л**	**И**	**И**	**И**

Для ложных высказываний приведем контрпримеры.

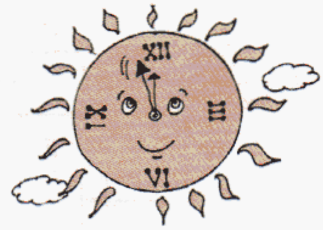
№	***Ложное высказывание***	***Контрпример***
1б	Если натуральное число делится на 3, то оно делится на 9, или n делится на $3 \Rightarrow n$ делится на 9.	**Число 3:** 3 делится на 3 (условие истинно), но не делится на 9 (заключение ложно).
2б	Если дробь неправильная, то обратная к ней дробь правильная, или $\frac{m}{n} \geqslant 1 \Rightarrow \frac{n}{m} < 1$ $(m, n \in N)$.	**Дробь** $\frac{5}{5}$: эта дробь неправильная (условие истинно), и обратная к ней дробь неправильная (заключение ложно).
3а	Если число больше 8, то оно больше или равно 9, или $x > 8 \Rightarrow x \geqslant 9$.	**Число 8,5:** 8,5 больше 8 (условие истинно), но меньше 9 (заключение ложно).

Итак, отрицанием следования $P \Rightarrow Q$ является предложение

$$\neg(P \Rightarrow Q), \quad \text{или} \quad \overline{P \Rightarrow Q},$$

которое читается «***Неверно, что*** из P следует Q» или «Из P ***не следует*** Q». Для его обоснования достаточно привести пример, когда P истинно, а Q ложно.

246 Переформулируй предложения, используя глагол «следует». Построй отрицания:



а) Если светит солнце, то вода в реке теплая.
б) Человек, знающий нотную грамоту, умеет играть на скрипке.
в) Стрелки часов совмещаются в полдень.
г) Любая неправильная дробь больше единицы.
д) Все углы четырехугольника прямые.
е) Если площади фигур равны, то равны и сами фигуры.

247 Переведи высказывания с математического языка на русский. Найди ложные высказывания и построй их отрицания. Обоснуй свой ответ.

а) $x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$;
б) $m^2 = n^2 \Rightarrow m = n$ $(m, n \in N)$;
в) $x^2 = y^2 \Rightarrow |x| = |y|$;
г) $|x| = |y| \Rightarrow x = y$;
д) $n > 5 \Rightarrow n \geqslant 6$ $(n \in N)$;
е) $x > 5 \Rightarrow x \geqslant 6$;
ж) $m \in N, n \in N \Rightarrow m - n \in N$;
з) $x^2 \in Q \Rightarrow x \in Q$.

248 а) Назови *тему* и *рему* высказываний. Что общего в высказываниях и чем они отличаются?

1. Квадрат является прямоугольником.
2. Прямоугольник является квадратом.

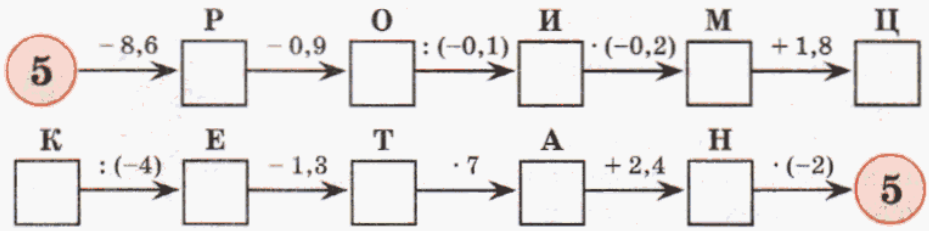
б) Сформулируй данные высказывания с помощью глагола «следует». Что ты замечаешь?
в) Найди ложное высказывание и построй его отрицание.

249 Запиши высказывания на математическом языке с помощью знака $\Rightarrow$. Найди ложные высказывания, построй отрицания и обоснуй их истинность.
а) Если первое число меньше второго, а второе – меньше третьего, то первое число меньше третьего.
б) Если первое число на 5 меньше второго, а второе – на 5 меньше третьего, то первое число на 5 меньше третьего.
в) Если первое число кратно второму, а второе – кратно третьему, то первое число кратно третьему.
г) Если первое число в 2 раза больше второго, а второе – в 2 раза больше третьего, то первое число в 2 раза больше третьего.
Что ты замечаешь?

250 Запиши в общем виде правила деления суммы, разности и произведения на число. Пользуясь этими правилами, вычисли устно:

а) $(15 \cdot 86) : 43$;
б) $(9494 \cdot 5) : 94$;
в) $6986 : 7 + 14 : 7$;
г) $5564 : 52 - 364 : 52$;
д) $(15 \cdot 19 + 38) : 19$;
е) $(3500 - 48 \cdot 70) : 35$.

251 Восстанови цепочки вычислений и расшифруй логические термины. Что они означают?



−0,7	0,6	−9	−4,9

−3,6	0,6	−9	−4,9

−4,5	−0,7	−3,6	45	−7,2	−4,9	−2,5	45	0,6

252 Найди множество корней уравнения:

а) $4(3x - 7) - 2(x - 15) = 5 - 3(2x + 9)$;

б) $x - 3(x - 2) = 18 + 2(5x - 8) - 6(2x + 1)$;

в) $-2{,}4(-2x + 0{,}3) = 1{,}8(5x - 0{,}4) - 4{,}2x$;

г) $2\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{6}\right) + 5\frac{1}{3} = -4\left(\frac{7}{12}x + 1\frac{3}{4}\right) + 3\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{3}x\right)$.

253 а) Высота прямоугольного параллелепипеда равна 5 см, ширина составляет 28% длины, а сумма площадей его боковых граней 192 см^2. Найди объем параллелепипеда.

б) Длина прямоугольного параллелепипеда на 40% больше ширины, а ширина в 5 раз меньше высоты. Чему равна площадь полной поверхности параллелепипеда, если его объем равен 56 дм^3?

Д **254** Переформулируй предложения, используя глагол «следует». Построй их отрицание.

а) Простое число всегда нечетно.

б) Нечетное число всегда является простым.

255 Реши уравнения:

а) $8(x - 3) - 5(2x - 4) = 6x - 7(x - 4)$;

б) $-0{,}3(x + 4) + 4{,}7 = 0{,}5(8x - 7) - 1{,}2(5x - 3)$.

256 Ширина прямоугольного параллелепипеда составляет 60% длины, высота на 20% больше ширины, а сумма трех его измерений равна 5,8 дм. Найди объем и площадь боковой поверхности этого параллелепипеда.

С **257** Запиши числа 9, 25, 32, 75, 100 в системе счисления с основанием $d = 2$.

3. Обратное утверждение.

Легко заметить, что в каждом примере пункта 1 предложения (а) и (б) похожи друг на друга. Именно, если предложение (а) имеет вид $P \Rightarrow Q$, то предложение (б) имеет вид $Q \Rightarrow P$: условие одного предложения является заключением другого, и наоборот.

Определение. Предложение «Если Q, то P» ($Q \Rightarrow P$) называется **обратным** к предложению «Если P, то Q» ($P \Rightarrow Q$).

Таким образом, чтобы получить предложение, обратное к предложению с союзом «если..., то...», надо просто поменять в нем местами условие и заключение. Отсюда и употребление слова «обратное»: *в обратном предложении условие и заключение идут в обратном порядке.*

При этом исходное предложение $P \Rightarrow Q$ является *обратным* к своему обратному $Q \Rightarrow P$. Поэтому утверждения $P \Rightarrow Q$ и $Q \Rightarrow P$ называются **взаимно обратными**.

Если предложение явно сформулировано как условное с союзом «если..., то...», то переход к обратному предложению не сложен. Но обратные предложения существуют для любых высказываний общего вида, а не только для условных предложений.

В этом случае для построения предложения, обратного к данному, можно данное высказывание переформулировать с союзом «если..., то...». Например, мы говорим: «Все кошачьи – четвероногие», но в точности ту же мысль выражает условное предложение: «*Если* животное принадлежит семейству кошачьих, *то* оно является четвероногим».

Конечно, так не говорят, поскольку первое предложение короче и понятней. Но для второго предложения легче сформулировать обратное: «*Если* животное является четвероногим, *то* оно принадлежит семейству кошачьих». А это предложение означает, что «все четвероногие принадлежат семейству кошачьих».

Другими словами, предложения «Все кошачьи – четвероногие» и «Все четвероногие принадлежат семейству кошачьих» являются *взаимно обратными*. При этом ни то, ни другое предложение по форме не является условным.

Различать взаимно обратные предложения необходимо и в языке, и в математике – хотя бы потому, что из истинности данного утверждения не следует, что истинно обратное утверждение, – оно может быть как истинным, так и ложным. Путаница в этом вопросе может привести в повседневной жизни к недоразумениям, а в математике – к ошибкам.

На практике для формулировки обратного предложения к общему высказыванию обычно не делают тех шагов, которые мы прошли в рассмотренном выше примере. Все обстоит гораздо проще, если вспомнить понятия *темы* и *ремы*.

Именно, в предложении «Все кошачьи – четвероногие» мы говорим о кошачьих (*тема*) и утверждаем, что они четвероногие (*рема*). В предложении «Все четвероногие принадлежат семейству кошачьих» мы говорим о четвероногих (*тема*) и утверждаем, что они – кошачьи (*рема*).

Поэтому если высказывание общего вида, то для перехода к обратному предложению можно в данном высказывании поменять местами тему и рему.

Приведем еще несколько примеров общих высказываний и высказываний, обратных к ним, независимо от того, истинны они или ложны.

№	*Общее высказывание*	*Обратное высказывание*
1	Все счастливые люди – добрые.	Все добрые люди – счастливые.
2	Около правильного многоугольника можно описать окружность.	Если около многоугольника можно описать окружность, то он является правильным. Многоугольник, вписанный в окружность, является правильным.
3	Сумма двух натуральных чисел является натуральным числом.	Если сумма двух чисел является натуральным числом, то эти числа – натуральные.
4	Все гланы являются бусками.	Все буски являются гланами.

Обратите внимание на то, что во втором примере обратное высказывание записано двумя способами: из всех различных формулировок всегда выбирается наиболее естественная и понятная.

А последний пример наверняка у многих вызовет удивление, поскольку совершенно непонятно, о чем в нем идет речь. Однако формулировка обратного утверждения от этого сложнее не стала. Это означает, что способ построения обратного утверждения применим к любому общему высказыванию.

258 Найди в предложении условие и заключение и построй утверждение, обратное данному.

а) Если сумма цифр числа делится на 9, то число делится на 9.
б) Если число кратно 3 и 5, то оно кратно 15.
в) Если дробь сократима, то ее числитель и знаменатель имеют общий делитель, отличный от 1.
г) Если дробь правильная, то числитель дроби меньше ее знаменателя.

259 Переведи высказывания с математического языка на русский. Запиши на математическом языке и прочитай обратные высказывания:

а) $n \leqslant 5 \quad \Rightarrow \quad n < 6,\ n \in N$;

б) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad ad = bc \ \ (a,\ b,\ c,\ d \neq 0)$;

в) НОД $(a, b) = 1 \quad \Rightarrow \quad$ НОК $(a, b) = ab$;

г) $a \parallel b \quad \Rightarrow \quad b \parallel a$;

д) $xy = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ или $y = 0$;

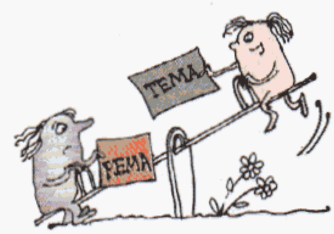
е) $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$, или $x_2 = 0$, или $\ldots$, или $x_n = 0$.

260 Запиши высказывания на математическом языке. Докажи, что обратные к ним высказывания ложны, и построй их отрицания.

а) Если число меньше или равно 5, то оно меньше 6.
б) Если число кратно 40, то оно кратно 4 и 10.
в) Если числа равны, то равны и квадраты этих чисел.
г) Если числа равны, то равны и модули этих чисел.
д) Две параллельные прямые лежат в одной плоскости.
е) Две перпендикулярные прямые имеют общую точку.

261 Для данных общих высказываний построй обратные высказывания. Найди ложные высказывания, построй их отрицания и обоснуй истинность построенных отрицаний.

а) Любое натуральное число больше или равно 1.
б) Все числа, кратные 10, оканчиваются на 0.
в) Треугольник является многоугольником.
г) Квадрат является прямоугольником.
д) Сумма противоположных чисел равна 0.
е) Произведение взаимно обратных чисел равно 1.



262 Придумай общее высказывание и построй для него обратное.

263 Найди взаимно обратные высказывания. С помощью каких союзов можно объединить их в одно предложение?

а) $a^2 = b^2 \quad \Rightarrow \quad |a| = |b|$;

в) $|a| = |b| \quad \Rightarrow \quad a^2 = b^2$;

б) $a^3 = b^3 \quad \Rightarrow \quad a = b$;

г) $a = b \quad \Rightarrow \quad a^3 = b^3$.

264 Придумай высказывание с союзом «если..., то...» и построй для него обратное. Как объединить эти два высказывания в одно предложение?

265 Вычисли и запиши следующее число в ряду ответов, сохраняя закономерность:

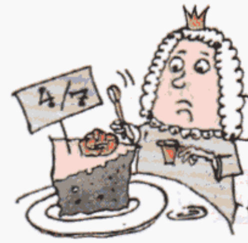
а) $0,24 : (-0,04)$	б) $-0,8-0,7$	в) $-1 : (-9)$
$-30 \cdot (-0,16)$	$-2\frac{1}{3} \cdot 0,9$	$\frac{5}{18} - 0,5$
$1,4 - 5$	$0,56 : (-0,2)$	$1,2 : 2,7$
$-1\frac{4}{5} + 4,2$	$-7,2 \cdot \frac{1}{2}$	$-1 + \frac{1}{9}$

266 1) Увеличь число x: а) на 3; б) в 4 раза; в) на треть; г) на 160%.

2) Уменьши число y: а) на 2; б) в 5 раз; в) на четверть; г) на 30%.

267 Найди:

а) $\frac{4}{7}$ от 0,35;
б) 0,08 от 12;
в) 25% от 5,6;
г) 70% от a;
д) число, $\frac{2}{3}$ которого равны 1,8;
е) число, 0,9 которого равны 72;
ж) число, 2% которого равны 0,64;
з) число, 40% которого равны b.



268 **БЛИЦтурнир.**

Составь выражения и упрости их:

а) Груши дороже яблок на 15 р., а яблоки дешевле винограда в 2 раза. На сколько груши дешевле винограда, если яблоки стоят a р.?

б) Первый букет цветов стоит b р., второй – на 40% дороже первого, а стоимость третьего составляет треть общей стоимости первого и второго букетов вместе. Сколько рублей надо заплатить за все три букета?

в) От куска ткани длиной d м отрезали в первый раз 20% всей длины, во второй раз – 30% всей первоначальной длины, а в третий раз – на 5 м меньше, чем во второй раз. Сколько метров ткани осталось в куске?

г) В бидоне было x л молока. Сначала из него отлили 25% всего молока, а потом 20% остатка. Сколько молока еще осталось в бидоне?

269 1) Разложи числа на простые множители и найди их наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное:

а) 18 и 21; б) 28 и 245; в) 16 и 160; г) 27 и 100.

2) Чем интересны примеры (в) и (г)? Закончи предложения:

Если число a является делителем числа b, то НОД $(a, b) = ...$, НОК $(a, b) = ...$

Если число a кратно числу b, то НОД $(a, b) = ...$, НОК $(a, b) = ...$

270 Значение выражения $\frac{1}{6}+\frac{11}{9}+\frac{5}{12}+\frac{8}{15}+\frac{11}{18}$ принадлежит множеству $A=\left\{\frac{29}{20}, \frac{39}{20}, \frac{39}{25}, \frac{59}{20}, \frac{99}{35}\right\}$. Найди значение этого выражения, не вычисляя сумму.

271 Найди корни уравнения (устно):

а) $-\frac{2}{3}x=0$; в) $-x+\frac{5}{9}=0$; д) $2x+9=0$; ж) $-\frac{3}{7}x+6=0$;

б) $1{,}75x=0$; г) $2{,}5-x=0$; е) $-3x-1=0$; з) $-0{,}1x-2{,}4=0$.

272 Реши уравнение $ax+b=0$, если:

а) $a=0$; $b=0$; б) $a=0$; $b\neq 0$; в) $a\neq 0$; $b=0$; г) $a\neq 0$; $b\neq 0$.

273 Пшеницей засеяно 2 участка земли общей площадью 75 га. На первом участке собрали урожай 32 ц с гектара, а на втором – 28 ц с гектара. Сколько тонн пшеницы собрали с двух участков, если с первого собрали на 30 т пшеницы больше, чем со второго?

274 С первого поля собрали на 25% меньше хлопка, чем со второго, а с третьего – на 20% меньше, чем с первых двух. Сколько тонн хлопка собрали с трех полей вместе, если с третьего поля собрали хлопка на 48 ц больше, чем со второго?

Д **275** Запиши высказывания на математическом языке и построй обратные к ним:

а) если прямая a перпендикулярна прямой b, то прямая b перпендикулярна прямой a;
б) из того, что натуральное число больше 9, следует, что оно больше или равно 10;
в) если число кратно 4 и 25, то оно кратно 100;
г) если число неотрицательно, то модуль числа равен самому числу.

276 Запиши высказывания на математическом языке. Докажи, что обратные к ним высказывания ложны, и построй их отрицания:
а) если число кратно 10, то оно кратно 2;
б) если число больше 4, то оно больше или равно 3;
в) равные фигуры имеют равные площади;
г) сумма двух неправильных дробей – неправильная дробь.

277 Разложи числа на простые множители и найди их наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное:

а) 24 и 80; б) 25, 90 и 105; в) 108 и 972; г) 176 и 875.

278 Семья израсходовала 35% своего месячного дохода на питание, седьмую часть суммы на питание – на коммунальные услуги, 80% остатка – на покупки, а остальные 3000 р. были положены на счет в сбербанк. Чему равен месячный доход семьи?

279 Кастрюля в 3 раза дороже сковородки. Ковш дороже сковородки на 96 р., но дешевле кастрюли на 32 р. Сколько стоит набор из кастрюли, сковородки и ковша?

280 Найди значения выражений:

а) $7\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{9}{11}\right) : 4{,}6 \cdot (-2{,}75) : 3\frac{3}{4}$; б) $\left(-0{,}5 : 1{,}25 + 1\frac{2}{5} : \left(-1\frac{4}{7}\right) - \frac{10}{11}\right) \cdot (-2{,}5)$.

С **281** Запиши числа 9, 25, 32, 75, 100 в системе счисления с основанием: а) $d = 3$; б) $d = 5$; в) $d = 9$; г) $d = 12$.

282 В классе учатся 24 мальчика и 32 девочки, а всего 100 человек. В какой системе счисления записаны все эти сведения, если система счисления одна и та же?

4. Следование и равносильность.

Понятие *следования* оказывается тесно связанным с уже известным нам понятием равносильности.

Ясно, что «иметь отчество Андреевич» и «иметь отца, которого зовут Андрей» – это одно и то же. Поэтому, если человек имеет отчество Андреевич, мы можем сделать вывод, что его отца зовут Андрей, и обратно, если человека зовут Андрей, то все его сыновья – Андреевичи. Другими словами, равносильность этих предложений означает, что верны два *взаимно обратных* утверждения:

«Человек X имеет отчество Андреевич $\Rightarrow$ Отца человека X зовут Андрей»,
«Отца человека X зовут Андрей $\Rightarrow$ Человек X имеет отчество Андреевич».

Так же обстоит дело и с математическими утверждениями. Мы знаем, например, что предложения $x < y$ и $y > x$, где x и y – рациональные числа, означают одно и то же, то есть равносильны:

$$x < y \Leftrightarrow y > x.$$

С другой стороны, ясно, что каждое из двух предложений $x < y$ и $y > x$ следует из другого:

$$x < y \Rightarrow y > x, \quad y > x \Rightarrow x < y.$$

Таким образом, одновременная истинность этих двух взаимно обратных предложений означает равносильность: $x < y \Leftrightarrow y > x$. И вообще, сказать: «Предложения P и Q равносильны» – это то же самое, что сказать: «Истинны следования: $P \Rightarrow Q$ и $Q \Rightarrow P$».

Можно записать сделанный вывод и символически, хотя запись получается не слишком простой и без навыка не сразу поддается расшифровке:

$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q \text{ и } Q \Rightarrow P).$$

Но в действительности эта запись расшифровывается без особого труда: достаточно заменить символ $\Leftrightarrow$, стоящий перед скобками, на словосочетание «означает, что». А скобки здесь поставлены для того, чтобы ясно показать, о равносильности каких предложений идет речь. Если хотя бы одну из этих пар скобок не поставить, мы получим записи, которые можно толковать по-разному:

$$P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q \text{ и } Q \Rightarrow P), \quad (P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P \Rightarrow Q \text{ и } Q \Rightarrow P.$$

В первой из них не понятно, какие *два* предложения равносильны; во второй не понятно, что соединяет союз «и».

Мы видим, что в выражениях логического языка роль скобок аналогична роли пунктуации в обычном языке. Подобным образом смысл предложения

«КАЗНИТЬ НЕЛЬЗЯ ПОМИЛОВАТЬ»

невозможно понять, не зная, как в нем расставлены знаки препинания.

В речи равносильность выражается с помощью таких оборотов, как: ***«тогда и только тогда»***, ***«если и только если»***, ***«в том и только в том случае»***, ***«это значит»***, ***«необходимо и достаточно»*** и др. Например:

«Разделить число a на число b – ***это значит*** найти такое число c, которое при умножении на b дает a»,

«Чтобы установить мировой рекорд, ***необходимо и достаточно*** показать результат лучше действующего мирового рекорда» и т.д.

283 Прочитай высказывания разными способами:

а) $|x| < a \;\Leftrightarrow\; -a < x < a,\;\; (a > 0)$;

б) $|x| > a \;\Leftrightarrow\; x > a$ или $x < -a,\;\; (a > 0)$;

в) Число a на 7 меньше, чем число $b \;\Leftrightarrow\; a = b - 7$;

г) Число n кратно 9 $\Leftrightarrow$ Сумма цифр числа n кратна 9.

284 Запиши высказывания на математическом языке и прочитай два следования, которые объединены в каждом предложении.

а) Число x в 2 раза больше, чем число y, тогда и только тогда, когда $x = 2y$.

б) Для того чтобы число a было кратно 3, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр числа a была кратна 3.

в) Вычесть из числа a число b – это значит найти такое число c, которое при сложении с b дает a.

г) Квадрат числа x равен 9 в том и только в том случае, когда $x = 3$ или $x = -3$.

285 Докажи с помощью *контрпримера*, что следующие утверждения не являются равносильными:

а) $x^2 = 25$ и $x = 5$;
б) $x^2 = 16$ и $x = -4$;
в) $|x| = 7$ и $x = 7$;
г) $|x| < 9$ и $x < 2$.

286 Допиши предложения так, чтобы получились истинные высказывания ($a, b, c, d \neq 0$):

а) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = \ldots;$
б) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \ldots;$
в) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \ldots;$
г) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \ldots$

287 Придумай два равносильных высказывания и объедини их в одно предложение тремя разными способами.

288 Запиши решение уравнений, используя знак $\Leftrightarrow$:

а) $-0{,}5x + 3 = 0$;
б) $-0{,}5x + 3 \cdot x = -5$;
в) $-x - 3x + 2x = 0{,}4$;
г) $0{,}02x - x + 0{,}7x = -2{,}8$;
д) $-2x - 4 + x = -0{,}8$;
е) $0{,}6x - x + 2{,}5 = 1\frac{1}{2}$.

289 Найди неизвестные члены пропорции. Расположи полученные числа в порядке возрастания, сопоставив их соответствующим буквам, и расшифруй слово. Что оно означает?

Н $\frac{x}{18} = \frac{7}{3}$ Т $\frac{1}{0{,}07} = \frac{x}{5{,}6}$ А $\frac{-2{,}4}{8} = \frac{9{,}6}{x}$ М $\frac{0{,}3}{-x} = \frac{-1{,}5}{10}$

У $\frac{32}{1{,}6} = \frac{4}{x}$ Е $\frac{6}{x} = \frac{1{,}2}{0{,}5}$ Р $\frac{x}{16} = \frac{0{,}5}{-2}$ Г $\frac{14}{-5} = \frac{x}{0{,}1}$

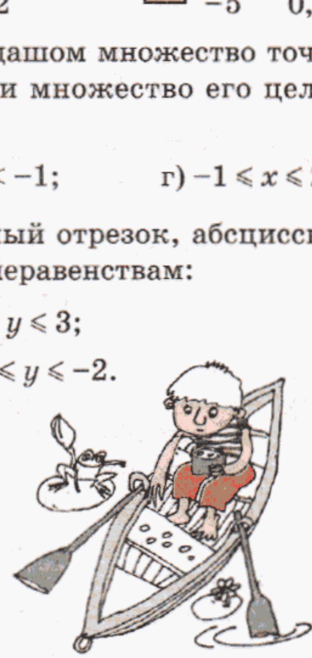
290 Отметь на координатной прямой цветным карандашом множество точек, удовлетворяющее данному неравенству. Запиши множество его целых решений и 2 дробных решения:

а) $-2 \leqslant x < 3$; б) $-4 < x \leqslant 0$; в) $-5 < x < -1$; г) $-1 \leqslant x \leqslant 2$.

291 Начерти на координатной плоскости произвольный отрезок, абсциссы и ординаты точек которого удовлетворяют данным неравенствам:

а) $1 \leqslant x \leqslant 4$; $2 \leqslant y \leqslant 5$;
б) $0 \leqslant x \leqslant 6$; $-3 \leqslant y \leqslant 0$;
в) $-3 \leqslant x \leqslant 2$; $-4 \leqslant y \leqslant 3$;
г) $-5 \leqslant x \leqslant 1$; $-62 \leqslant y \leqslant -2$.

Сколько таких отрезков можно провести?



292 а) У причала стояли двухместные и четырехместные лодки. Сколько было лодок каждого вида, если всех лодок было 40, а мест в них – 128?
б) У Миши были двухрублевые и пятирублевые монеты на общую сумму 77 руб. Всего монет было 25. Сколько монет каждого вида было у Миши?

293 Вычисли сумму, представляя каждое слагаемое в виде разности дробей с числителями, равными 1:

а) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 10}$;

б) $\frac{1}{6\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 8}+\ldots+\frac{1}{48\cdot 49}+\frac{1}{49\cdot 50}$.

Д **294** Допиши предложения так, чтобы получились истинные высказывания. Какие два взаимно обратных следования объединены в каждом предложении?

а) $x^2 = 49 \Leftrightarrow x = \ldots$ или $x = \ldots$;
в) $|x| < 5 \Leftrightarrow \ldots < x < \ldots$;
б) $|x| = 2 \Leftrightarrow x = \ldots$ или $x = \ldots$;
г) $|x| > 1 \Leftrightarrow x > \ldots$ или $x < \ldots$

295 Запиши решение уравнений, используя знак $\Leftrightarrow$:

а) $-3{,}2x - 1{,}2 + 1{,}4x = 7{,}8$;
б) $1{,}5x - 0{,}3x - 2{,}1x = -0{,}12$.

296 В 30 больших и маленьких коробок расфасовано 33 кг печенья. Сколько было коробок каждого вида, если в маленькую коробку помещалось 0,5 кг печенья, а в большую – 1,5 кг печенья?

297 Найди неизвестный член пропорции:

$$\frac{15{,}2\cdot 0{,}25-48{,}51 : 14{,}7}{x} = \frac{\left(\frac{13}{44}-\frac{2}{11}-\frac{5}{66} : 2\frac{1}{2}\right)\cdot 1\frac{1}{5}}{3{,}2+0{,}8\cdot\left(5\frac{1}{2}-3{,}25\right)}.$$

С **298** Найди два числа, сумма, произведение и частное которых равны между собой.

5. Следование и свойства предметов.

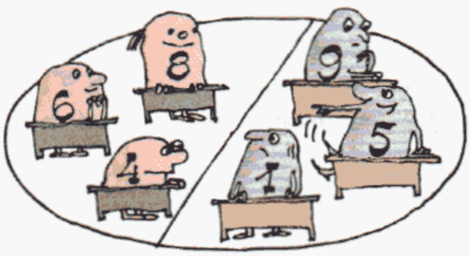
Каждый объект из окружающего нас мира обладает определенными свойствами: животное во дворе может быть птицей или кошкой, иметь две или четыре ноги, дерево может быть хвойным или лиственным, книга у тебя на столе может быть художественной или учебной, оркестр в театре – симфоническим или джазовым и т. д.

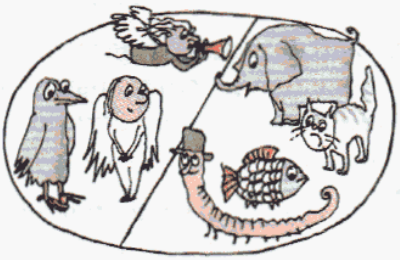
Точно так же и абстрактные объекты обладают определенными свойствами: предложение может быть сложным или простым, сложносочиненным или сложноподчиненным, в языке может существовать или не существовать артикль, страна может быть или не быть монархией и т.д.

Это касается и математических объектов: натуральное число может быть четным или нечетным, простым или составным, может делиться на 3 и одновременно делиться на 5; дробь может быть или не быть правильной, уравнение может иметь корни или не иметь корней, высказывание может быть или не быть истинным и т.д.

Введенные ранее математические предложения с одной или несколькими переменными описывают свойства объектов. Например, предложение «n – четное число ($n \in N$)» соответствует свойству натуральных чисел «быть четным», предложение «x имеет две ноги ($x \in A$, где A – множество живых существ)» соответствует свойству некоторых живых существ иметь две ноги и т.п.

Каждое свойство разбивает множество предметов, о которых идет речь, как правило, на два класса: обладающие данным свойством и не обладающие им. В первом из приведенных примеров это множество четных чисел и множество нечетных чисел, во втором примере один класс состоит из людей, птиц и других живых существ, имеющих две ноги, другой – из остальных живых существ.





Выше мы аккуратно сказали «как правило», поскольку может оказаться, что ни один из элементов некоторого множества заданным свойством не обладает или, напротив, все его элементы обладают этим свойством. Например, все элементы множества N натуральных чисел являются целыми числами, и ни одно из них не является отрицательным числом.

Если для конкретного человека обычно существенны свойства конкретного предмета, то науки интересуются прежде всего **общими свойствами** предметов, то есть свойствами, относящимися к целым множествам, классам предметов.

Например, выбирая новогоднюю елку, человек обычно интересуется высотой конкретного дерева, его свежестью, раскидистостью... А биологи будут говорить о ели, что это дерево, хвойное, покрытосеменное и т.д. Другими словами, биолога интересуют те общие свойства, которые выделяют ель в классе всех деревьев.

Так же и в математике: например, конкретный человек может интересоваться тем, правильно ли с него запросили в кассе 853 рубля за 6 одинаковых предметов, а математики устанавливают общие свойства делимости, позволяющие обнаружить ошибку устно. Поэтому речь здесь идет об общем понятии «делимость».

В рассмотренных примерах можно записать:

x – ель $\Rightarrow$ x – хвойное, покрытосеменное
($x \in D$, где D – множество деревьев);

a делится на b $\Rightarrow \exists\, c\colon\ a = bc\quad (a, b, c \in N)$.

Таким образом, предложения, выражающие общие свойства предметов, можно представить в виде логического следования.

Обратное к логическому следованию предложение тоже является следованием и может быть истинным или ложным. Так, утверждение, обратное первому предложению, ложно, поскольку сосна тоже является деревом хвойным и покрытосеменным. А вот предложение, обратное второму, истинно по определению делимости.

Каждое понятие обладает множеством свойств. Эти свойства, как мы видели, могут быть представлены в виде следований. Например, квадрат обладает следующими свойствами:

$ABCD$ – квадрат $\Rightarrow \angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^0$

$ABCD$ – квадрат $\Rightarrow AB = BC = CD = DA$

$ABCD$ – квадрат $\Rightarrow ABCD$ – прямоугольник, $AB = BC = CD = DA$

Из трех утверждений, обратных данным утверждениям, истинным является только последнее. Значит, можно записать:

$ABCD$ – квадрат $\Leftrightarrow ABCD$ – прямоугольник, $AB = BC = CD = DA$

Свойства, однозначно определяющие объект, называют его ***характеристическими свойствами***, или ***признаками***. Другими словами, признаки понятия равносильны самому понятию.

Для того чтобы дать определение некоторого понятия, необходимо использовать только его характеристические свойства. Например, мы не можем использовать в качестве определения квадрата первые два свойства – контрпримеры приведены на рисунках 18 и 19:

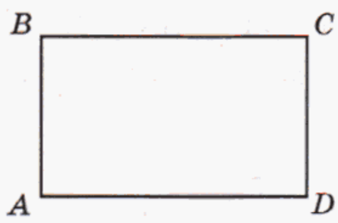


Рис. 18

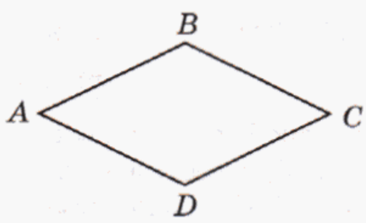


Рис. 19

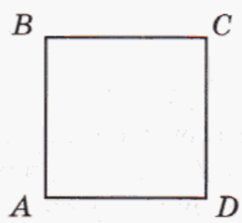


Рис. 20

Вместе с тем равенство всех сторон прямоугольника характерно только для квадрата, а значит, является его признаком (рис. 20). Поэтому квадрат можно определить как «прямоугольник, все стороны которого равны».

В определении понятий над знаком $\Leftrightarrow$ иногда ставят латинские буквы *def* (от латинского *definitio* – определение). Таким образом, определение квадрата на математическом языке можно записать так:

$$ABCD \text{ – квадрат} \overset{def}{\Leftrightarrow} ABCD \text{ – прямоугольник, } AB = BC = CD = DA$$

299 На какие классы разбивают данное множество объектов следующие свойства:

а) «z не тонет в воде» ($z \in C$, где C – множество металлов);

б) «k имеет парламент» ($k \in D$, где D – множество государств);

в) «n кратно 9» ($n \in N$);

г) «$|x| \in N$» ($x \in Z$);

д) «$y^2 + 1 = 0$» ($y \in Q$);

е) «$a \parallel b$» ($a, b \in P$, где P – множество прямых и b – фиксированная прямая из этого множества).

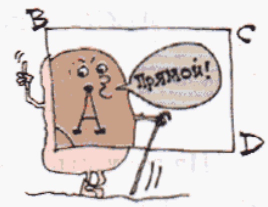
300 Какие свойства описывают следующие предложения? Какие из этих свойств являются признаками?

а) n кратно 9 $\Rightarrow$ сумма цифр числа n кратна 9 ($n \in N$);

б) $a : b = c \Rightarrow c \cdot b = a$ ($a, b, c \in Q$, $b \neq 0$);

в) $ABCD$ – прямоугольник $\Rightarrow$ $\angle A$ – прямой;

г) $a \parallel b \Rightarrow a \cap b = \varnothing$ ($a, b \in P$, где P – множество прямых).



301 Запиши, используя знак *def*, определение:

а) умножения рациональных чисел; б) правильной дроби; в) прямоугольника; г) трапеции.

302 Выполни действия:

а) $\frac{3}{14} - \frac{5}{7}$; в) $-2\frac{1}{7} \cdot \left(-1\frac{3}{25}\right)$; д) $-5{,}4 \cdot \left(-1\frac{2}{9}\right) : 3{,}75 \cdot \left(-4\frac{1}{6}\right)$;

б) $-1\frac{5}{6} - \frac{7}{15}$; г) $5\frac{5}{6} : \left(-2\frac{1}{3}\right)$; е) $-3\frac{3}{5} : \left(-1\frac{5}{12}\right) \cdot (-6{,}8) \cdot 9\frac{3}{8} : \left(-1\frac{2}{7}\right)$.

303 Реши уравнения:

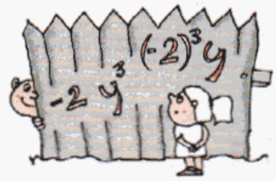
а) $(d - 6) - (7d + 1) = -(4 - 3d)$; в) $5(n - 8) - 3(4 - 2n) = 7(3n - 7) + 9$.

б) $y - \frac{y}{6} = \frac{1}{3} + 0{,}5y$; г) $1{,}7k - 0{,}3(k - 5) = 2{,}8 - 0{,}1(k + 4)$.

304 На тренировке лыжник пробежал первый круг на 5% быстрее, чем второй, а третий круг – на 14% медленнее, чем второй. Сколько времени в среднем он тратил на один круг, если третий круг он пробежал на 4 мин 45 с медленнее, чем первый? На сколько процентов больше времени он затратил на прохождение третьего круга, чем первого?

305 Прочитай выражения и найди их значения при $y = -0{,}5$:

а) $(-2y)^3$; б) $-2y^3$; в) $(-2)^3y$.



306 Запиши, используя знак *def*, определение:

а) неправильной дроби;

б) гипотенузы прямоугольного треугольника.

307 В двух селах было 800 жителей. Через год в одном селе число жителей уменьшилось на 10%, а в другом – увеличилось на 10%. В результате общее число жителей в двух селах увеличилось на 10 человек. Сколько жителей было в каждом селе первоначально?

308 Найди неизвестный член пропорции:

$$\frac{0{,}1862 - 4{,}05 \cdot 0{,}204}{12{,}8 \cdot \frac{3}{4} - 31{,}64 : 3\frac{1}{2}} = \frac{\left(1\frac{17}{63} - \frac{5}{21} + \frac{1}{9}\right) : 1\frac{3}{7}}{x}.$$

309 Участок квадратной формы расширили так, что получили новый квадрат, сторона которого на 5 м больше стороны первоначального, а площадь при этом увеличилась на 225 м². Чему равна площадь первоначального участка?

Задачи для самопроверки.

310 Найди значения выражений:

а) $4(x - 7) - 8(x - 3)$, если $x = -0{,}6$;

б) $-2(a - b) - 5(a + b)$, если $a = -1$, $b = 0{,}5$;

в) $x^2 - 3x - 6 + x + 8 - 2x^2 + 5x$, если $x = -2$.

311 Реши уравнения:

а) $10 - 3y = -4 + 7y$;

б) $3(4 - c) = 6 - (8c + 3)$;

в) $-\frac{x}{4} + 5 = \frac{x}{3} - 9$;

г) $1{,}6b - 0{,}4 = 3{,}2 - 0{,}8(2 - b)$;

д) $2(n - 3) - 4(5 - 2n) = -5(4n + 7)$;

е) $\frac{-0{,}2(6x + 1)}{3{,}6} = \frac{0{,}5x}{-9}$.

312 В магазин завезли фрукты и продали их за 3 дня. В первый день продали 30% всех фруктов, во второй день – $\frac{2}{5}$ остатка, а в третий день – остальные 168 кг. Сколько всего килограммов фруктов завезли в магазин?

313 В двух мешках 80 кг моркови, причем в первом мешке на 40% моркови меньше, чем во втором. Сколько килограммов моркови в каждом мешке?

314 Двум рабочим было поручено изготовить по 60 деталей. Однако производительность первого рабочего была на 20% выше, чем у второго, и через 9 ч второму рабочему осталось сделать в 2,5 раза больше деталей, чем первому. На сколько деталей в час больше делал первый рабочий, чем второй, если их производительность была постоянной?

315 а) В прямоугольной системе координат построй четырехугольник $ABCD$, если $A\,(-6;\,2)$, $B\,(6;\,8)$, $C\,(8;\,-5)$ и $D\,(-4;\,-2)$. Найди координаты точки пересечения его диагоналей.
б) Построй окружность с центром в точке $A\,(-3;\,5)$ и радиусом 5 единичных отрезков. Найди координаты ее точек пересечения с осями координат.

316 Построй в одной координатной плоскости графики зависимостей $y = kx$, если $k = -\frac{1}{2}$ и $k = -2$. Что ты наблюдаешь? Сформулируй *гипотезу* о расположении графиков зависимостей вида $y = kx$ ($k < 0$) и проверь ее для $k = -\frac{1}{4}$ и $k = -4$.

317 Найди истинные высказывания и запиши их на математическом языке с помощью знака $\Rightarrow$. Построй отрицания ложных высказываний и обоснуй их.
а) Если первое число больше второго, а второе – больше третьего, то первое число больше третьего.
б) Если число кратно 2 и 5, то оно кратно 25.
в) Модуль отрицательного числа равен числу, противоположному данному.

318 Запиши данное высказывание и обратное к нему с помощью знака $\Rightarrow$:

Если число кратно 2 *и* 3, *то оно кратно* 6.

Объедини оба высказывания в одно предложение разными способами.

319 Два пешехода идут с разной скоростью: 50 м/мин и 70 м/мин. Сейчас расстояние между ними равно 600 м. Каким оно станет через t мин, если пешеходы движутся: а) навстречу друг другу; б) в противоположных направлениях; в) вдогонку; г) с отставанием? Запиши для всех четырех случаев формулу зависимости расстояния d м между ними от времени движения t мин. (Встречи за это время не произойдет.)

320 Найди число, 20% которого составляют:

$$15{,}7 - 14{,}7 : \left(-0{,}75 + 0{,}7 : \left(-2\frac{1}{3}\right)\right) \cdot 2{,}45.$$

321 Уменьши на 20% число:

$$\frac{-0{,}02 \cdot (6{,}2 : 0{,}31 - \frac{5}{6} \cdot 7{,}2) - 1{,}52}{\frac{4}{11} \cdot (-2{,}2) : (-0{,}1) - 10}.$$

322 Реши уравнение методом *проб и ошибок*: $x(x + 4) = 45$, $x \in N$.

323 Реши уравнение методом *перебора*: $x^2 - 8x = 20$, $x \in N$.

Глава 4
Геометрия

§ 1. Геометрические фигуры на плоскости

1. Что такое геометрия? Рисунки и определения геометрических понятий.

Слово *геометрия* греческого происхождения, и нетрудно догадаться, как оно переводится на русский язык. *Гея* – богиня земли в древнегреческой мифологии, *metrio* – по-гречески «мерить». Поэтому ***геометрия*** – это, можно сказать, *землемерие*.

Само название геометрии показывает, что она возникла непосредственно из практических потребностей, главным образом связанных с измерением земельных участков. При решении этих задач нужно было измерять площади, а значит, в первую очередь, измерять отрезки.

Таким образом, геометрия исторически связана с измерениями. Но это лишь ее «детство», и впоследствии содержание геометрии значительно расширилось – до такой степени, что измерения отошли в ней на дальний план, а в центре внимания оказались *геометрические фигуры и их свойства*.

Ранее мы уже познакомились со многими геометрическими фигурами. Каждый без труда может изобразить на плоскости точку, прямую, луч, отрезок, прямоугольник и квадрат, различные углы, окружность, параллельные и перпендикулярные прямые и т.д.

Однако даже таким уже хорошо знакомым понятиям в математике необходимо дать *определения*, так как в определениях описываются *характеристические свойства* фигур, и, значит, только на их основе можно проводить математические рассуждения. Например, невозможно судить об истинности высказывания «*Острый угол меньше тупого угла*», не зная определений этих углов.

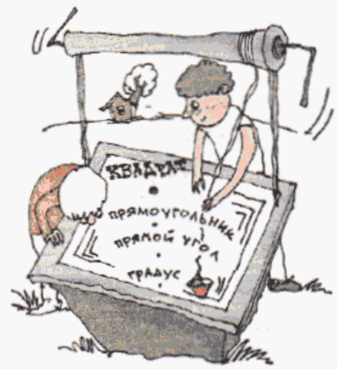
Многие определения нам уже встречались, но вспомнить их гораздо труднее, чем изобразить нужную геометрическую фигуру на бумаге.

Рис. 21

Например, легче нарисовать отрезок (рис. 21), чем дать его определение: «Отрезок – это часть прямой, ограниченная двумя точками».

Точно так же изобразить окружность, угол, прямоугольник гораздо легче, чем увидеть и выразить в речи их существенные свойства.

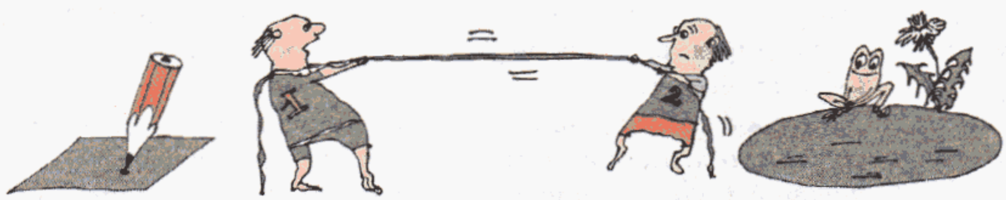
В каждом определении есть *новое* – то, что определяется, и уже известное («старое») – то, с помощью чего определяется новое. Например, в определении «Квадратом называется прямоугольник с равными сторонами» понятие «*квадрат*» – новое, а уже известное – «*прямоугольник с равными сторонами*».



Но если вдуматься глубже, осознать новое можно, только понимая «старое», – в данном случае понятия *прямоугольник*, *сторона прямоугольника* и *равные стороны*. Другими словами, определение нового понятия всегда опирается на другие понятия, которые, в свою очередь, нуждаются в определениях. Но эти определения также должны опираться на ранее определенные понятия: например, понятие «прямоугольник» опирается на «прямой угол», «прямой угол», то есть угол в 90°, – на «градус» и т.д. Таким образом, складывается, казалось бы, безвыходное положение – получается бесконечный процесс.

В математике выход был найден в III веке до нашей эры: древнегреческий математик Евклид осознал, что **всем геометрическим понятиям определения дать невозможно** и поэтому некоторые из них должны быть введены без определения. Такие понятия называют **основными**.

Ясно, что в качестве основных целесообразно ввести только те понятия, которые легко воспринимаются с помощью рисунка или материального образа. К основным понятиям в геометрии относятся, прежде всего, **точка**, **прямая** и **плоскость**. Наглядное представление о *точке* дает след, который оставляет на бумаге неподвижный остро заточенный карандаш, представление о *прямой* – туго натянутая тонкая нить, представление о *плоскости* – спокойная гладь воды.



Чтобы от рисунка перейти к определению какого-либо понятия, нужно выявить его *характеристические* свойства.

Например, чтобы дать определение окружности, можно вспомнить, что при построении ее с помощью циркуля расстояние между концами ножек циркуля не меняется. Поэтому **окружность** можно определить как множество всех точек плоскости, находящихся на одинаковом расстоянии от одной заданной точки (рис. 22). Это определение окружности опирается на понятия «множество», «точка», «расстояние», «одинаковый», «плоскость».

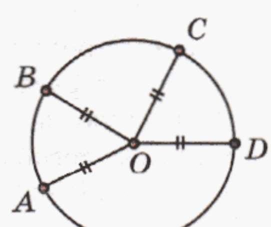


Рис. 22

Для определения смежных углов (рис. 23) надо заметить, что одна сторона у них общая. Но этого недостаточно, так как у углов на рис. 24 тоже есть общая сторона, но они не являются смежными. Поэтому надо отметить еще одну существенную особенность смежных углов – две другие их стороны образуют прямую.

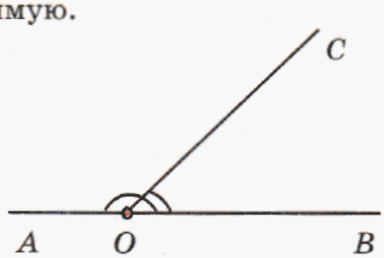


Рис. 23

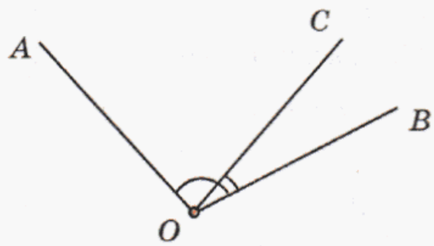


Рис. 24

Значит, **смежные** углы – это два угла, одна сторона у которых общая, а две другие образуют прямую. Это определение смежных углов опирается на понятия «прямая», «угол», «сторона угла», «общая сторона».

Заметим, что определение смежных углов можно дать и по-другому: **смежными** называются два угла, одна сторона у которых общая, а две другие являются дополнительными лучами.

Эти два определения **равносильны**: из второго следует первое, и наоборот. Однако второе определение опирается уже на несколько другие геометрические понятия – «угол», «сторона угла», «общая сторона» и «дополнительные лучи».

До сих пор мы шли от рисунка к определению. Обратный путь – от определения к рисунку – часто оказывается более простым. Для этого надо лишь хорошо знать *предыдущие* понятия – те, на которые новое понятие опирается. Например, по определению:

> ***Хордой*** окружности называется отрезок, соединяющий две точки этой окружности

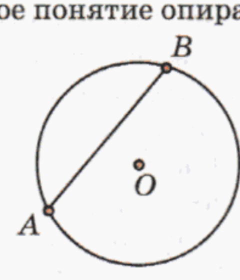


Рис. 25

легко сделать рисунок хорды: достаточно отметить на окружности любые две точки и соединить их отрезком (рис. 25).

В математике очень полезно, давая определение некоторого понятия, проиллюстрировать его рисунком. Действительно, геометрический образ, в отличие от текстовых определений, часто легче воспринимается и лучше запоминается.

Очень полезны рисунки и при решении математических задач, где успех решения часто напрямую зависит от точности рисунка, иллюстрирующего задачу.

К **324** Татьяна и Петр дали следующие определения квадрата.

- *Татьяна*:

  «Квадратом называется четырехугольник с равными сторонами».

- *Петр*:

  «Квадратом называется параллелограмм, все углы которого прямые».

Почему нельзя согласиться с такими вариантами определения? Предложи свой вариант и сравни его с вариантом, данным в тексте учебника.

В № 325 – 329 по определениям сделай рисунки, назови определяемые понятия и понятия, на которые они опираются. Построй логическую последовательность введения этих определений и установи, в каких случаях ее можно изменить, а в каких – нет.

325 а) Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

б) Треугольником называется фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, соединяющих эти точки. Точки называются вершинами треугольника, а отрезки – его сторонами.

в) Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется медианой треугольника.

г) Отрезком называется часть прямой, ограниченная двумя точками. Эти точки принадлежат отрезку и называются его концами.

326 а) Два луча с общим началом, составляющие прямую, называются дополнительными лучами.

б) Лучом называется часть прямой, ограниченная только одной точкой. Эта точка принадлежит лучу и называется его началом.

в) Два угла называются вертикальными, если стороны одного из них являются дополнительными лучами для сторон другого.

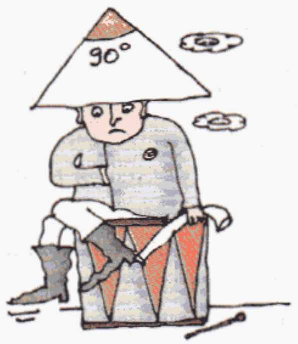
г) Углом называется геометрическая фигура, образованная двумя лучами с общим началом. Лучи называются сторонами угла, а их общее начало – вершиной угла.

327 а) Треугольник называется прямоугольным, если один его угол прямой.

б) Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение длины прилежащего катета к длине гипотенузы.

в) Прямым углом называется угол, величина которого равна 90°.

г) В прямоугольном треугольнике сторона, противолежащая прямому углу, называется гипотенузой, а две другие стороны называются катетами.



328 а) Отрезок, соединяющий точку окружности с ее центром, называется радиусом окружности.

б) Окружностью называется фигура, состоящая из всех точек плоскости, расположенных на заданном расстоянии от данной точки. Эта точка называется центром окружности.

в) Хорда, проходящая через центр окружности, называется диаметром.

г) Хордой окружности называется отрезок, соединяющий две ее точки.

329 а) Ромб – это параллелограмм, у которого все стороны равны.

б) Две прямые называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

в) Параллелограмм – это четырехугольник, у которого противолежащие стороны попарно параллельны.

г) Прямоугольник – это параллелограмм, у которого все углы прямые.

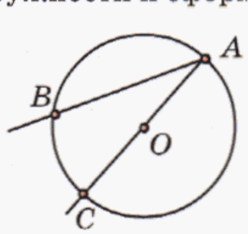
330 Сформулируй определение квадрата, основываясь на понятии: а) прямоугольник; б) ромб; в) параллелограмм.

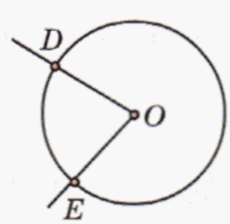
331 Прочитай определение *биссектрисы угла*.

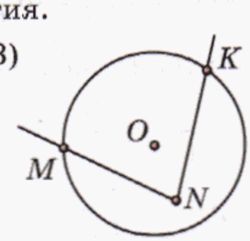
Биссектрисой угла называется луч, который исходит из вершины угла и делит часть плоскости, ограниченную углом, на две равные части.

Пользуясь им, предложи свой вариант определения *биссектрисы угла треугольника*. Сделай рисунки биссектрисы угла и биссектрисы угла треугольника.

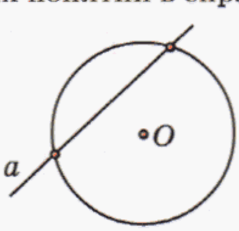
332 Как ты считаешь, какой из нарисованных углов называют *центральным*? Почему? Проверь по справочнику. Нарисуй несколько центральных углов окружности и сформулируй определение этого понятия.

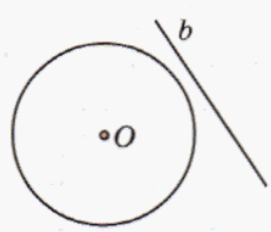
1)


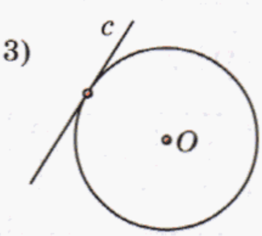
2)


3)


333 Какую из прямых на рисунке можно назвать *касательной* к окружности, а какую – *секущей*? Почему? Предложи свои варианты определений касательной и секущей и сделай рисунки. Сравни свои определения с определениями этих понятий в справочнике.

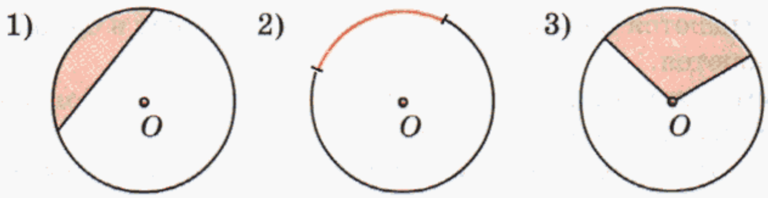
1)


2)


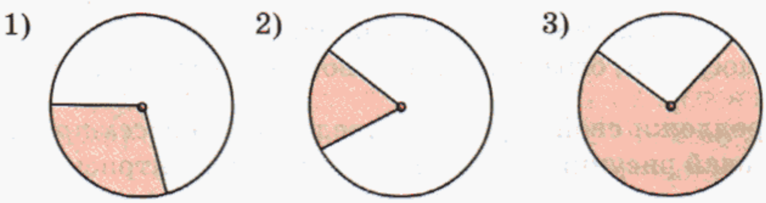
3)


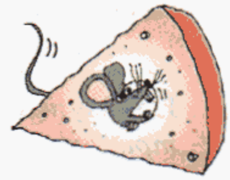
334 Что общего у окружности и круга и чем они отличаются друг от друга? Предложи свой вариант определения круга, пользуясь понятиями «окружность», «плоскость». Изобрази круг и окружность с помощью циркуля и цветных карандашей.

335 Исходя из значения слова «дуга» в обыденной речи, найди рисунок, на котором цветом изображена дуга окружности. Предложи свой вариант определения дуги окружности и сделай рисунок.



336 На рисунках изображены *секторы* круга. Выяви существенные свойства сектора и предложи свой вариант его определения. Сделай свой рисунок сектора.





337 Что означает запись: $\frac{a}{b}$? Изобрази с помощью геометрических фигур числа: а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{5}{6}$; в) $\frac{7}{9}$; г) $2\frac{4}{5}$.

338 Сравни дроби, если значения всех переменных – натуральные числа:

а) $\frac{5}{11}$ и $\frac{7}{11}$;　в) $\frac{3}{4}$ и $\frac{9}{5}$;　д) $3\frac{2}{19}$ и $2\frac{18}{19}$;　ж) $\frac{m}{n}$ и $\frac{m}{n+1}$;

б) $\frac{8}{9}$ и $\frac{8}{15}$;　г) $\frac{4}{7}$ и $\frac{12}{25}$;　е) 0,6 и $\frac{9}{16}$;　з) $\frac{x}{y}$ и $\frac{x+1}{y}$.

339 Выполни действия, сопоставь ответам соответствующие буквы и расшифруй слово. Что оно означает?

Р $-\frac{1}{6}-\frac{1}{18}$　**М** $-\frac{21}{22}+\frac{3}{55}$　**Т** $-3+2\frac{4}{5}$　**Я** $-1\frac{5}{14}-\frac{17}{21}$

О $\frac{2}{3}-\frac{3}{4}$　**И** $-\frac{1}{8}-\frac{11}{12}$　**Е** $2\frac{5}{6}-1\frac{8}{15}$　**Г** $4\frac{13}{80}-5\frac{11}{60}$

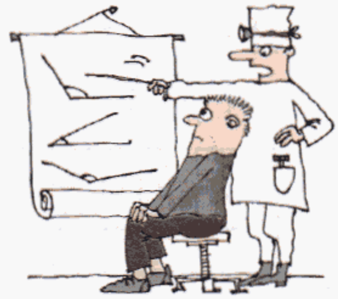
$-1\frac{1}{48}$	1,3	$-\frac{1}{12}$	–0,9	1,3	–0,2	$-\frac{2}{9}$	$-1\frac{1}{24}$	$-2\frac{1}{6}$

340 Реши уравнения:

а) $\frac{x}{9} - \frac{x}{3} + \frac{x}{18} = -1$; б) $y - \frac{y}{3} - \frac{3y}{4} = \frac{1}{6}$; в) $\frac{5}{6}z - z = \frac{z}{3} + \frac{1}{5}$.

В № 341 – 342 реши задачи разными способами.

341 а) Длина окружности переднего колеса повозки равна 2,8 м, а заднего – 3,5 м. Какое расстояние проехала повозка, если переднее колесо сделало на 50 оборотов больше заднего?



б) Длина окружности заднего колеса кареты на 0,8 м больше длины окружности переднего колеса. Какое расстояние проехала карета, если заднее колесо сделало 450 оборотов, а переднее – на 75 оборотов больше?

342 а) Печник должен был сложить печь за 12 дней. Но он выкладывал в день на 0,25 м³ больше, чем предполагал, и поэтому закончил работу на 4 дня раньше намеченного срока. Чему равен объем печи, если печник работал равномерно?

б) Бригада рабочих должна была сделать ремонт дороги за определенный срок, ремонтируя в день 2 км. Однако в день она ремонтировала на 0,1 км больше, и поэтому за 3 дня до срока ей осталось отремонтировать 4,5 км. Сколько километров дороги бригада уже отремонтировала?

Д **343** Прочитай определения, найди определяемые понятия и укажи понятия, на которые они опираются. Сделай рисунки, соблюдая логическую последовательность введения определений.

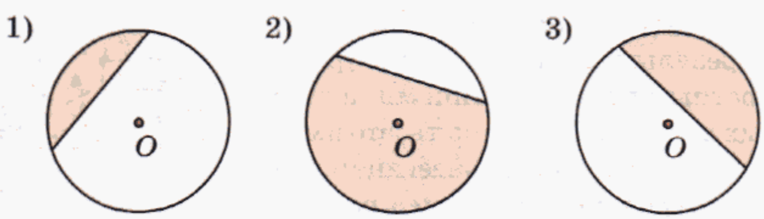
а) Параллелограммом называется четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны.

б) Замкнутая ломаная линия без самопересечений, все точки которой принадлежат одной плоскости, называется многоугольником.

в) Многоугольник, имеющий четыре вершины (стороны), называется четырехугольником.

г) Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

344 На рисунках изображены *сегменты* круга. Выяви существенные свойства сегмента и предложи свой вариант его определения. Сделай рисунок.



345 Выполни действия, сопоставь ответам соответствующие буквы и расшифруй математические термины. Найди в тексте учебника и запиши в тетрадь их определения.

Т $\frac{4}{9}+\frac{7}{18}$	**Ж** $1-\frac{3}{7}$	**А** $-2+\frac{1}{3}$	**Р** $3\frac{8}{11}-5\frac{2}{11}$
Е $-\frac{5}{21}-\frac{3}{7}$	**У** $\frac{2}{9}-1$	**Х** $\frac{9}{11}-4$	**О** $-1\frac{4}{15}-2\frac{5}{6}$
З $\frac{5}{8}-\frac{2}{3}$	**К** $-1-\frac{1}{5}$	**Н** $-1\frac{1}{4}-3$	**Д** $4\frac{4}{35}-3\frac{3}{14}$

$-4{,}1$	$\frac{5}{6}$	$-1\frac{5}{11}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{24}$	$-4{,}1$	$-1{,}2$

$-3\frac{2}{11}$	$-4{,}1$	$-1\frac{5}{11}$	$0{,}9$	$-1\frac{2}{3}$

346 Реши уравнения:

а) $\frac{x}{2}-\frac{x}{6}=3$; б) $\frac{y}{3}-2=\frac{y}{5}$; в) $\frac{z}{4}+1=-\frac{3z}{8}-4$.

347 Найди число, 24% которого составляют:

$$\frac{-1\frac{1}{3}\cdot\left(2+0{,}9\cdot\left(-\frac{5}{9}\right)\right):\left(-\frac{4}{9}\right)-2{,}7}{\left(-2\frac{4}{7}\cdot 0{,}58-0{,}42\cdot 2\frac{4}{7}\right)\cdot 1\frac{5}{9}:\left(-2\frac{2}{3}\right)}.$$

348 Реши задачу разными способами:
Автобус проходит расстояние от города до озера за 3 часа. Автомобиль, скорость которого на 12 км/ч больше скорости автобуса, проходит это же расстояние на 30 мин быстрее. Чему равно расстояние от города до озера?

С **349** Сколько диагоналей можно провести в четырехугольнике? А в треугольнике, пятиугольнике, шестиугольнике, n-угольнике?

350 Сколько возникает на окружности дуг, если на ней поставлены две точки? А если точек 3, 4, 10, n?

2. Классификация геометрических фигур.

Свойства геометрических фигур в силу их большого практического значения интересовали людей еще в глубокой древности. Однако многие свойства даже таких простейших фигур на плоскости, как треугольник, были найдены не сразу, а в результате длительной и кропотливой работы с конкретными треугольниками, а затем обобщения полученных выводов. Может быть, это имел в виду великий Евклид, когда говорил древнеегипетскому царю Птолемею I, что ***царских путей в геометрии нет***.

Рассмотрим, например, треугольник ABC (рис. 26). Заметим, что все углы треугольника ABC острые. Можем ли мы на этом основании сделать вывод, что углы всех треугольников острые?

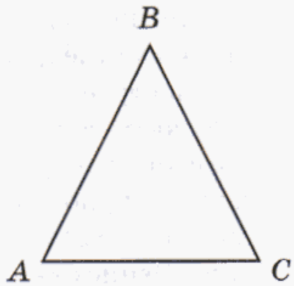


Рис. 26

Конечно, нет. Уже имеющийся опыт работы с треугольниками убеждает нас в том, что это не так: углы треугольников могут быть и прямыми, и тупыми, при этом сумма всех углов треугольника всегда равна 180°.

Поэтому треугольники *по виду углов* можно разбить на три класса: **остроугольные** – все углы которых острые, **прямоугольные** – имеющие один прямой угол, и **тупоугольные** – имеющие один тупой угол:

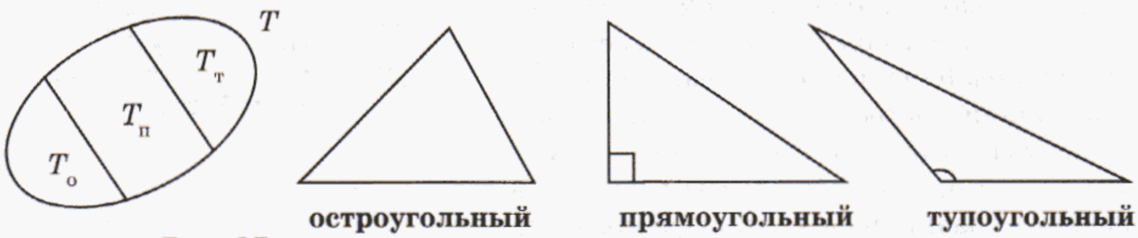


Рис. 27

Эти классы интересны тем, что *любой треугольник попадает ровно в один класс*, и тем самым множество T треугольников определенным образом упорядочивается. На рис. 27 показана диаграмма Эйлера–Венна множества T, где $T_о$, $T_п$ и $T_т$ обозначают соответственно множества остроугольных, прямоугольных и тупоугольных треугольников.

Разбиение множества на классы, при котором каждый элемент попадает ровно в один класс, называется **классификацией**. Полученные таким образом классы являются непересекающимися, и их объединение составляет все множество. Свойство, в соответствии с которым множество разбивается на классы, называют *основанием классификации* (в нашем примере – «вид углов»).

Иногда в классах геометрических фигур выделяются *подклассы*, то есть подмножества. Например, в множестве треугольников T можно выделить треугольники, которые имеют две равные стороны, – их называют **равнобедренными**; в множестве равнобедренных треугольников, в свою очередь, можно выделить **равносторонние** – те, у которых равны все три стороны.

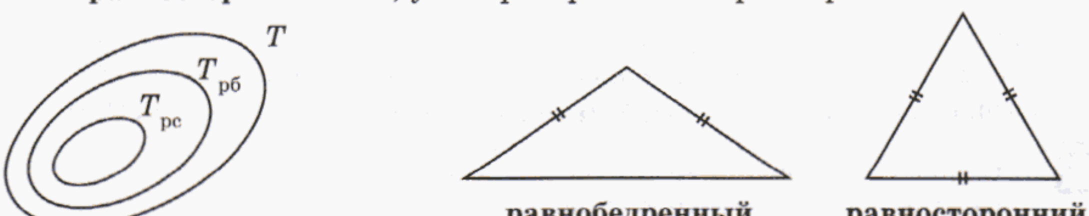


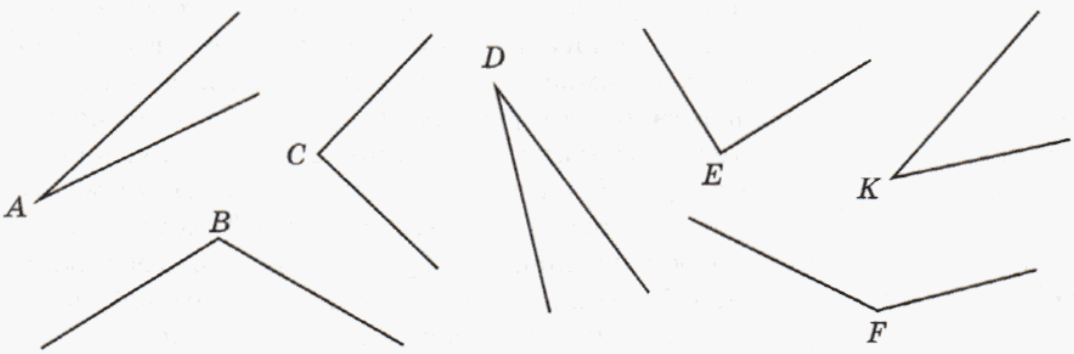
Рис. 28

Все равносторонние треугольники являются равнобедренными – ведь они удовлетворяют определению равнобедренных треугольников. Обозначая их соответственно $T_{рс}$ и $T_{рб}$, можно записать $T_{рс} \subset T_{рб} \subset T$ (рис. 28).

Умение проводить классификацию очень важно, так как это помогает определить, на какие классы фигур распространяются те или иные свойства фигур. Так, из построенных нами диаграмм следует, что равносторонние треугольники обладают всеми свойствами равнобедренных, а вот обратное неверно. Точно так же свойства прямоугольных треугольников могут быть неверны для остроугольных и тупоугольных.

Выделение различных классов объектов и установление связей между ними чрезвычайно важно не только для математики, но и для всех наук. Например, биологи в настоящее время выявили только цветковых растений около 250 тысяч *видов*. Исследование всех этих видов было бы невозможно, если бы близкие по строению виды не объединялись в *роды*, роды – в *семейства*, семейства – в *классы*. Аналогично в химии изучаются различные классы веществ, в физике – различные классы физических явлений, в филологии – различные части речи и т.д.

К **351** а) Найди и отметь на рисунке соответственно острые, прямые и тупые углы. Сформулируй и запиши с помощью знака $\Leftrightarrow$ определение углов каждого вида. На какие понятия опираются эти определения?



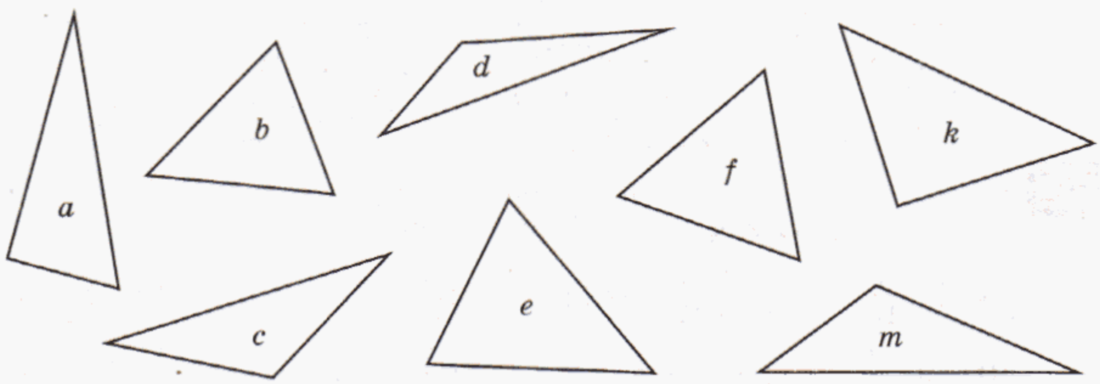
б) На какие классы можно разбить все углы α, где $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, по их виду? Докажи, что это разбиение является классификацией. Нарисуй для этого разбиения диаграмму Эйлера–Венна и отметь на ней углы A, B, C, D, E, F, K.

352 а) Начерти в тетради произвольный треугольник и определи вид его углов.
б) Сколько острых, сколько прямых и сколько тупых углов может иметь треугольник? Сделай рисунки.
в) На какие классы можно разбить множество треугольников по виду углов? Как они называются? Является ли это разбиение классификацией? Почему? Нарисуй соответствующую диаграмму Эйлера–Венна.

353 а) Треугольник называется равнобедренным, если две его стороны равны. Запиши определение равнобедренного треугольника с помощью знака $\Leftrightarrow$. На какие понятия опирается это определение?
б) Равные стороны равнобедренного треугольника называются боковыми, а третья сторона называется основанием. Нарисуй в тетради несколько равнобедренных треугольников с одним и тем же основанием. Где расположены их вершины? Сформулируй *гипотезу*.

354 а) Треугольник называется равносторонним,если у него все стороны равны. Запиши определение равностороннего треугольника с помощью знака $\Leftrightarrow$. На какие понятия опирается это определение?
б) Является ли равнобедренный треугольник равносторонним? А наоборот? Нарисуй диаграмму Эйлера–Венна, иллюстрирующую взаимосвязь между множеством всех треугольников, множеством равнобедренных и множеством равносторонних треугольников.

355 Определи на глаз, какие из треугольников, изображенных на рисунке, являются: а) остроугольными; б) прямоугольными; в) тупоугольными; г) равнобедренными; д) равносторонними? Есть ли треугольники, которые обладают сразу несколькими из перечисленных свойств?



356 а) Может ли быть треугольник равнобедренным и тупоугольным? А равнобедренным и прямоугольным? Сделай рисунки.
б) Нарисуй в тетради диаграмму Эйлера–Венна, показывающую классификацию треугольников по виду углов. Покажи, как располагаются на ней подмножества равнобедренных и равносторонних треугольников. Какие сочетания видов треугольников возможны?

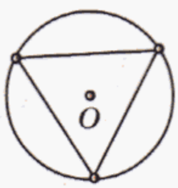
357 а) Начерти равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) и измерь транспортиром углы при основании AC. Что ты замечаешь? Сформулируй *гипотезу*.
б) Начерти равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) и проведи медиану к его основанию AC. Что ты замечаешь? Сформулируй *гипотезу*.
Как ты считаешь, на какие виды треугольников можно распространить построенные гипотезы? Обоснуй свой ответ.

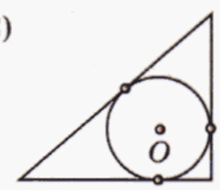
358 а) Построй отрезок AB, равный 5 см. Затем проведи две дуги радиусом 4 см и центрами в точках A и B до их пересечения в точке C. Соедини точки A, B и C отрезками и определи вид треугольника ABC.
Измерь с помощью транспортира углы получившегося треугольника. Что ты замечаешь? Сформулируй *гипотезу*. На какие виды треугольников ее можно распространить?

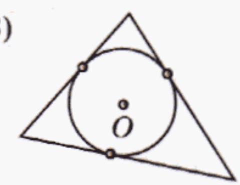
359 Сколько общих точек могут иметь прямая и окружность? Рассмотри все возможные случаи и сделай рисунки. Является ли это разбиение классификацией?

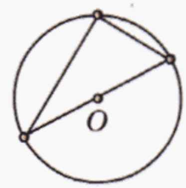
360 Прямая называется касательной к окружности, если она имеет с этой окружностью одну общую точку. Начерти прямую, касательную к окружности, и проведи радиус в точку касания. Что ты замечаешь? Сформулируй *гипотезу*. Можно ли распростронить ее на секущие к окружности? Почему?

П **361** Какие из окружностей на рисунке являются *вписанными* в треугольник, а какие – *описанными* около него? Выяви существенные признаки вписанной и описанной окружностей и предложи свой вариант определений этих понятий.

1)


2)


3)


4)


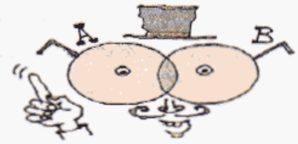
362 Расположи ответы примеров в порядке возрастания, сопоставь им соответствующие буквы и расшифруй общенаучное понятие. Что оно означает?

З $\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{15}$ **Т** $\frac{5}{12} \cdot \left(-2\frac{4}{7}\right)$ **П** $8 : \left(-1\frac{7}{9}\right)$ **Г** $2\frac{5}{11} \cdot \left(-4\frac{8}{9}\right)$

О $-9 \cdot \frac{16}{45}$ **А** $-\frac{2}{9} \cdot (-3{,}6)$ **И** $-5 : 0{,}6$ **Е** $-\frac{4}{9} : \left(-2\frac{21}{3}\right)$

363 Прочитай предложения. Определениями каких понятий они могут служить? Почему? Поясни их с помощью диаграммы Эйлера–Венна и проиллюстрируй примерами из разных областей знания:

1) $A \subset B \;\Leftrightarrow\; (a \in A \Rightarrow a \in B)$;
2) $x \in A \cap B \;\Leftrightarrow\; x \in A$ и $x \in B$;
3) $x \in A \cup B \;\Leftrightarrow\; x \in A$ или $x \in B$.



364 Прочитай высказывания и проиллюстрируй их с помощью диаграммы Эйлера–Венна. Найди ложные высказывания, построй отрицания и обоснуй их истинность.

1) $A \subset B$ и $B \subset C \;\Rightarrow\; A \subset C$;
2) $A \subset C$ и $B \subset C \;\Rightarrow\; A \subset B$;
3) $x \in A$ и $A \subset B \;\Rightarrow\; x \in B$;
4) $x \in B$ и $A \subset B \;\Rightarrow\; x \in A$.

365 Как найти часть от числа? Как найти число по его части? Найди:

а) $\frac{4}{9}$ от 16,2; д) число, $\frac{3}{5}$ которого равны 1,5;

б) 15% от 3,04; е) число, 6% которого составляют 4,2;

в) $\frac{4}{11}$ от a; ж) число, $\frac{2}{7}$ которого составляют x;

г) 58% от b; з) число, 140% которого равны y.

366 Найди часть, которую одно число составляет от другого, и вырази ее в процентах:

а) 18 от 50; в) 1,2 от 15; д) 0,42 от 5,6; ж) a от b;

б) 9 от 72; г) $\frac{8}{15}$ от $5\frac{1}{3}$; е) $11\frac{1}{5}$ от 7,2; з) m от n.

367 **БЛИЦтурнир.**

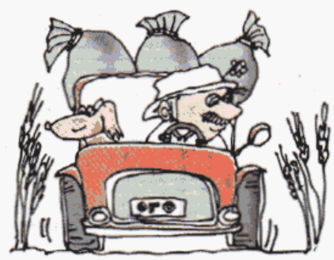
а) Посадили d семян. Из них k семян проросли. Чему равен процент всхожести семян?

б) Цена товара на складе равна a р. Торговая наценка в магазине равна 24%. Сколько стоит этот товар в магазине?

в) Акции фирмы в январе стоили n р., что составило 80% их стоимости в феврале. Сколько стоили акции этой фирмы в феврале?

г) За месяц построено 60% дороги. Чему равна длина всей дороги, если осталось построить c км?

д) Бак автомобиля вмещает x л бензина. На каждые 100 км пути расходуется 20% объема бака. Сколько литров бензина потребуется на 350 км пути?



е) Фермер с каждого гектара из 4 га своего поля собрал по b т картофеля. На семена он оставил 25% всего урожая, а остальной картофель отвез на рынок. Сколько тонн картофеля он отвез на рынок?

368 В городской думе 80 депутатов, среди которых 4 независимых депутата, а остальные представляют интересы трех партий. Число депутатов от первой партии на 20% больше, чем от второй, а число депутатов от второй партии составляет 62,5% числа депутатов третьей.

а) Сколько депутатов от каждой из трех партий представлено в городской думе?

б) Может ли какая-либо партийная фракция заблокировать принятие решения, для которого требуется квалифицированное большинство голосов (не менее $\frac{2}{3}$) всех депутатов думы?

369 1) На бумаге в клетку отмечены шесть точек (рис. 29). Выпиши все треугольники, вершины которых могут быть в этих точках.

2) Подчеркни разными цветами треугольники, которые являются: а) остроугольными; б) прямоугольными; в) тупоугольными; г) равнобедренными.

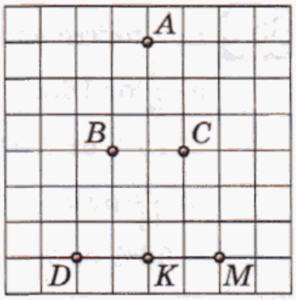


Рис. 29

370 Переведи с математического языка на русский определение касательной к окружности:

Прямая a – касательная к окружности (O; r) в точке A	$\overset{def}{\Leftrightarrow}$	$a \cap (O; r) = \{A\}$.

Сколько касательных к окружности можно провести из точки, лежащей вне окружности? А из точки, лежащей на окружности? Сделай рисунки и сформулируй *гипотезу*. Можем ли мы считать ее верной для всех окружностей на основании выполненных построений и измерений?

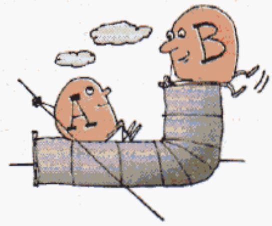
371 Учеников шестых классов попросили высказать свое мнение об утверждении: «Чтобы хорошо учиться по математике, надо заучивать текст учебника». Распределение их мнений приведено на круговой диаграмме. Сколько шестиклассников высказали то или иное мнение, если всего в опросе приняли участие 160 человек? А что по этому поводу думаешь ты?

372 В трех школах поселка 1260 учеников. Число учащихся первой школы на 10% меньше, чем второй, а число учащихся второй школы составляет 80% от числа учащихся третьей школы. Сколько учащихся в каждой из этих трех школ?

373 Расположи ответы примеров в порядке убывания, сопоставь им соответствующие буквы и расшифруй название геометрической фигуры. Начерти эту фигуру и придумай ее определение:

П $\left(-\frac{2}{5}\right)^2$	**Р** $-1,9 + 2\frac{4}{5}$	**Я** $9\frac{3}{4} : (-3)$	**Ц** $-1\frac{1}{15} : 1\frac{3}{5}$
А $-\frac{5}{6} + 1\frac{4}{9}$	**И** $1\frac{3}{7} \cdot (-1,4)$	**Т** $-1\frac{3}{8} \cdot (-4)$	**Е** $2\frac{6}{7} : \left(-6\frac{2}{3}\right)$

374 Найди процентное отношение чисел: 1) A и B; 2) B и A.

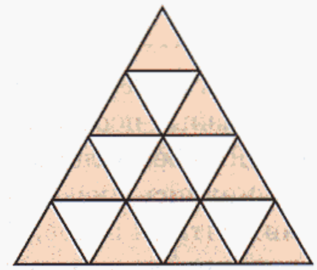


A $\left(\left(5\frac{4}{17}+3\frac{7}{8}\right)-7\frac{4}{17}\right)\cdot\left(-5\frac{1}{3}\right):(-6{,}25);$

B $-1{,}8:(-1{,}2)+\left(3\frac{1}{12}-2\frac{1}{12}:\left(-\frac{15}{16}\right)-7\frac{1}{4}\right):\left(-\frac{7}{9}\right).$

C **375** Дан прямоугольник, длины сторон которого относятся как 2 : 1. Разрежь его на части так, чтобы из них можно было составить:

а) равнобедренный прямоугольный треугольник;
б) равнобедренный тупоугольный треугольник;
в) равнобедренный остроугольный треугольник.

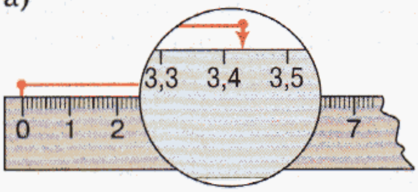


376 Сколько равносторонних треугольников ты видишь на рисунке?

3. Задачи на построение.

Исследование свойств фигур с помощью измерений имеет существенный недостаток – эта процедура приводит всегда к приближенному результату. Основой измерительных приборов – например, линейки и транспортира – является шкала. На собственном опыте вы убедились, что при проведении измерений второй конец отрезка или вторая сторона угла чаще всего проходит между делениями шкалы (рис. 30).

а)



б)

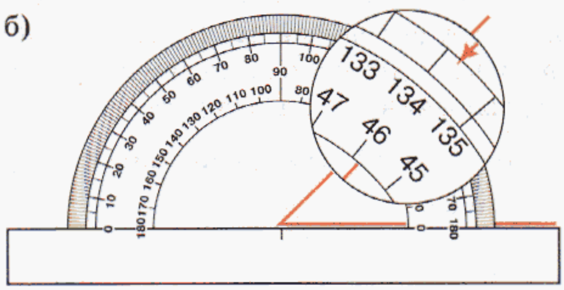


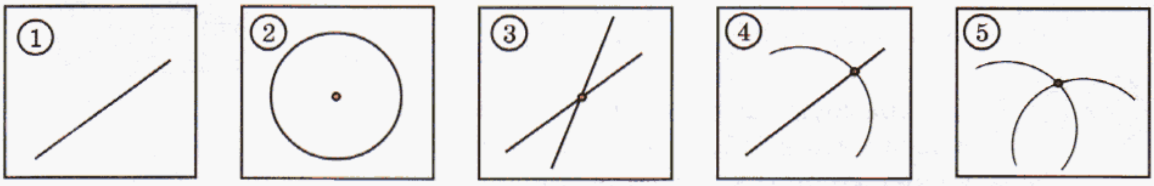
Рис. 30

И даже если можно определить, какое деление ближе, результат нельзя считать точным. Такова *неустранимая погрешность* непосредственных измерений.

Стремясь к большей точности, древние математики предпочитали строить геометрические фигуры, избегая сложных измерений, а используя лишь **проведение прямых по линейке и проведение окружностей циркулем.**

Не будем отступать от традиций и мы. Но, поставив цель – **точность построений,** – надо всегда помнить о технике построений. Математические линии не имеют толщины, и поэтому *практические построения тем точнее, чем лучше отточен карандаш и грифель циркуля.*

Итак, у нас есть линейка без делений и циркуль. Какие же базовые операции можно выполнять с помощью этих инструментов? Их всего пять: построение прямой (1), окружности (2), построение точки пересечения двух прямых (3), прямой и окружности (4) и двух окружностей (5):



Этих базовых операций оказывается достаточно для выполнения самых разнообразных построений. Древние греки даже считали, что с помощью циркуля и линейки без делений можно выполнить *любое* построение на плоскости, пока не столкнулись с некоторыми задачами, которые никто не мог решить на протяжении почти 24 веков. Лишь в XIX веке было установлено, что с помощью циркуля и линейки эти построения выполнить невозможно. Прочитать об этом можно в энциклопедической литературе, а мы сейчас убедимся в удивительных возможностях двух простых инструментов – циркуля и линейки.

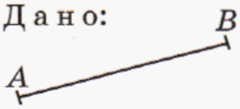
Рассмотрим несколько задач. Описание их решения приведено как на обычном языке, так и на языке множеств – пусть каждый использует тот язык, который ему удобен. Дополнительно введем новые обозначения, которые помогут различать в записи прямую, луч, отрезок и окружность:

(AB) – прямая AB;	$[AB)$ – луч AB;
$[AB]$ – отрезок AB;	(O, r) – окружность с центром O и радиусом r.

Слова типа «отложим», «проведем» и т.д. в описании на математическом языке будем опускать. «Равными» фигурами мы, как и прежде, будем считать фигуры, которые можно совместить наложением (при этом фигуры разрешается переворачивать в пространстве).

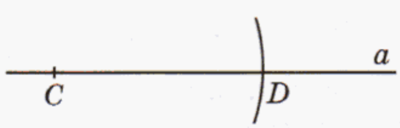
Задача 1. **Построение отрезка, равного данному.**

Дано:



Построить: $[CD]$ такой, что $CD = AB$.

Построение:



1) a, $C \in a$;
2) $r = AB$, $(C; r)$;
3) $D \in a \cap (C; r)$.
$[CD]$ – искомый.

Проведем произвольную прямую a и отметим на ней точку C. Возьмем раствор циркуля, равный данному отрезку, и проведем окружность с центром в точке C. Одну из точек пересечения этой окружности с прямой a обозначим D. Длина полученного отрезка CD равна радиусу проведенной окружности, то есть AB. Следовательно, $CD = AB$. Задача решена.

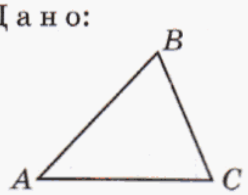
Мы видим, что при проведении различных построений естественным образом возникает вопрос: как доказать их правильность? В данной задаче мы использовали для этого определение окружности.

Для более сложных случаев необходимо использование общих свойств фигур, которые мы еще не изучали. Поэтому в настоящий момент мы можем лишь с некоторой степенью точности проверить правильность каждого конкретного построения с помощью, например, кальки или измерительных приборов. Строгие доказательства правильности рассмотренных построений разбираются в курсе геометрии старших классов.

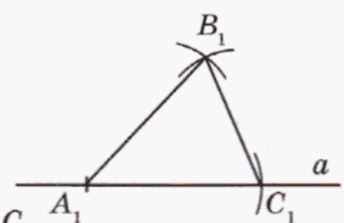
Построение отрезка, равного данному, выстроилось из основных операций 1, 2 и 4. Если данное построение нам встретится в следующих задачах, то мы не будем его повторять, а будем считать, что мы его уже провели. Таким образом, каждая решенная задача будет расширять спектр наших возможностей.

З а д а ч а 2. **Построение треугольника, равного данному.**

Д а н о:



П о с т р о е н и е:



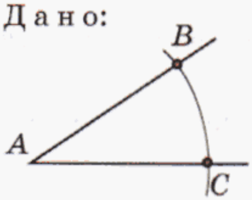
1) a;
2) $[A_1C_1] \subset a$; $A_1C_1 = AC$;
3) $r_1 = AB$, $(A_1; r_1)$;
4) $r_2 = BC$, $(C_1; r_2)$;
5) $B_1 \in (A_1; r_1) \cap (C_1; r_2)$.
$\Delta A_1B_1C_1$ – искомый.

П о с т р о и т ь: $\Delta A_1B_1C_1$ такой, что $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC$.

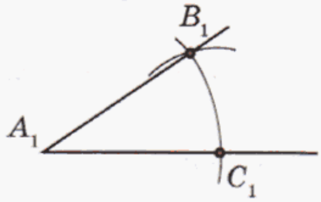
На произвольной прямой a отложим отрезок A_1C_1, равный отрезку AC. Затем построим окружность с центром в точке A_1 радиусом AB и окружность с центром в точке C_1 радиусом BC. Одну из точек пересечения окружностей обозначим B_1. Соединив отрезками точки A_1, B_1 и C_1, получим треугольник $A_1B_1C_1$, равный треугольнику ABC. Задача решена.

З а д а ч а 3. **Построение угла, равного данному.**

Д а н о:



П о с т р о е н и е:



1) $(A; r) \cap [AB) = \{B\}$;
$(A; r) \cap [AC) = \{C\}$;
2) $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC$.
$\angle A_1$ – искомый.

П о с т р о и т ь: $\angle A_1$ такой, что $\angle A_1 = \angle A$.

Эта задача сводится к предыдущей. Проведем окружность произвольного радиуса с центром в вершине данного угла и найдем точки ее пересечения со сторонами угла. Обозначим эти точки B и C. Построим треугольник $A_1B_1C_1$, равный треугольнику ABC. Угол A_1 в этом треугольнике равен углу A. Задача решена.

З а д а ч а 4. **Построение биссектрисы угла.**

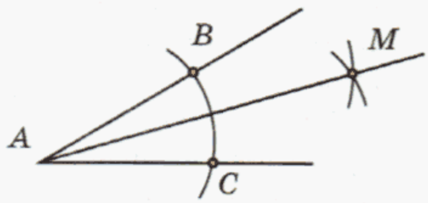
Д а н о:

$\angle A$.

П о с т р о и т ь:

биссектрису $\angle A$.

П о с т р о е н и е:



1) $(A;\, r) \cap [AB) = \{B\}$;
   $(A;\, r) \cap [AC) = \{C\}$;
2) $M \in (B;\, r) \cap (C;\, r)$.
$[AM)$ – биссектриса $\angle A$.

Проведем окружность произвольного радиуса с центром в вершине угла A и найдем ее точки пересечения со сторонами угла. Обозначим эти точки B и C. Проведем две окружности того же радиуса с центрами в B и C и найдем их точку пересечения, принадлежащую углу, – точку M. Луч AM– биссектриса $\angle A$. Задача решена.

З а д а ч а 5. **Деление отрезка пополам.**

Д а н о:

$[AB]$.

П о с т р о и т ь:

точку M такую, что

$M \in [AB]$; $AM = MB$.

П о с т р о е н и е:

1) $r > \frac{1}{2}AB$
2) $(A;\, r) \cap (B;\, r) = \{C;\, D\}$;
3) (CD);
4) $(CD) \cap [AB] = \{M\}$.
Точка M – искомая.

Построим две пересекающиеся окружности одного радиуса r (где $r > \frac{1}{2}AB$) с центрами в концах данного отрезка AB. Через точки C и D пересечения окружностей проведем прямую CD. Точка пересечения прямой CD с данным отрезком и есть искомая середина отрезка AB. Задача решена.

Заметим, что прямая CD не только проходит через середину отрезка AB, но и перпендикулярна к нему. Такую прямую называют **серединным перпендикуляром** к отрезку. Поэтому проведенное построение одновременно является и построением серединного перпендикуляра.

З а д а ч а 6. **Построение прямой, перпендикулярной данной и проходящей через данную точку.**

Рассмотрим два случая – когда данная точка принадлежит прямой и когда она прямой не принадлежит.

1. Д а н о:

Прямая a.

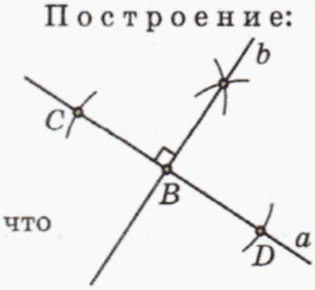
$B \in a$.

П о с т р о и т ь:

прямую b такую, что

$B \in b$; $b \perp a$.

П о с т р о е н и е:



1) $(B;\, r) \cap a = \{C;\, D\}$;
2) $b \perp CD$, $CB = BD$.
Прямая b – искомая.

2. Дано:

Прямая a.

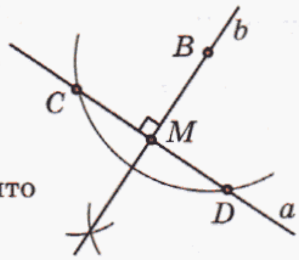
$B \notin a$.

Построить:

прямую b такую, что

$B \in b$; $b \perp a$.

Построение:



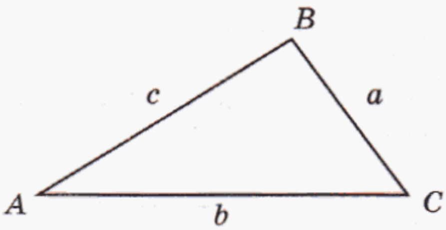
1) $(B;\, r) \cap a = \{C;\, D\}$;

2) $b \perp CD$, $CM = MD$.

Прямая b – искомая.

В обоих случаях проведем сначала окружность с центром в точке B, пересекающую прямую a в двух точках. Пусть это точки C и D. Затем построим серединный перпендикуляр b к отрезку CD. Он пройдет через точку B. Прямая b – искомая. Задача решена.

Для решения задач на построение далее нам потребуются следующие обозначения: угол и противолежащую сторону в треугольнике будем обозначать одной и той же буквой, причем угол обозначают прописной буквой, а сторону – строчной. Например, в треугольнике ABC:



a – сторона, противолежащая $\angle A$;

b – сторона, противолежащая $\angle B$;

c – сторона, противолежащая $\angle C$.

377 По описанию построения фигур, данному в тексте учебника, построй:

а) отрезок, равный данному (задача 1);

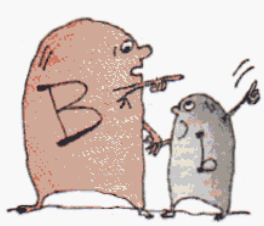
б) треугольник, равный данному (задача 2);

в) угол, равный данному (задача 3);

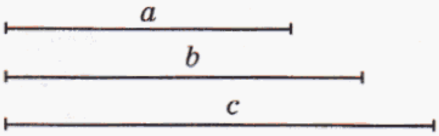
г) биссектрису данного угла (задача 4);

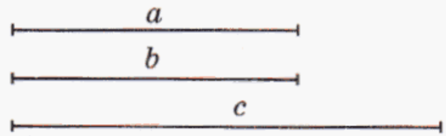
д) середину данного отрезка (задача 5);

е) прямую, перпендикулярную данной и проходящую через данную точку (задача 6).



378 Построй треугольник ABC по трем сторонам a, b и c и определи вид этого треугольника:

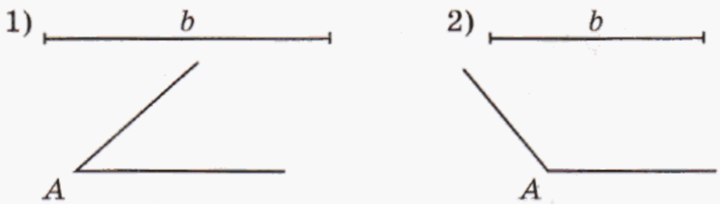
1) 

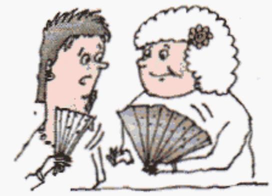
2) 

Сколько можно построить различных (не равных между собой) треугольников с тремя данными сторонами? Всегда ли эта задача имеет решение?

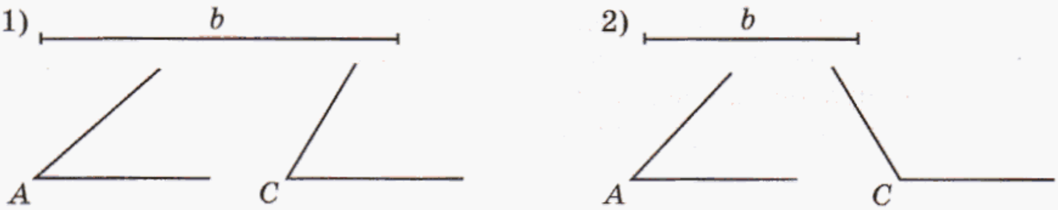
379 Можно ли построить треугольник, у которого периметр равен 24 см, а сумма длин двух сторон – 9 см?

380 Построй треугольник ABC по стороне b и прилежащему к ней углу A. Является ли решение однозначным? Всегда ли оно возможно? Какие виды треугольников могут получиться?

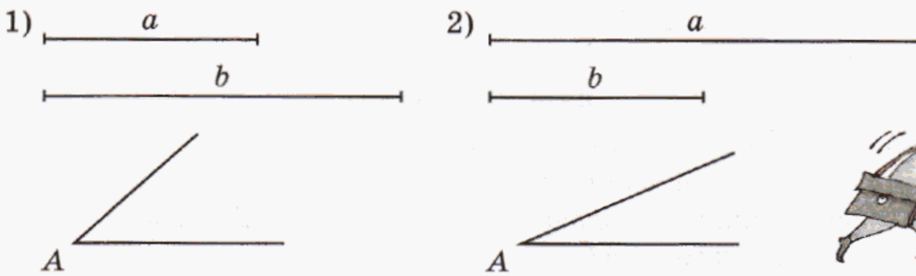




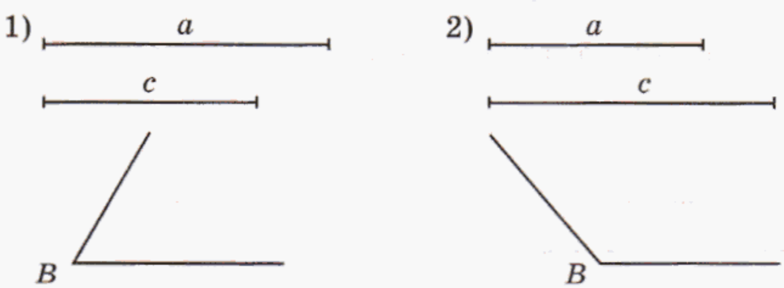
381 Построй треугольник ABC по стороне b и двум прилежащим к ней углам A и C. Сколько различных треугольников можно построить по этим данным? Определяется ли треугольник этими элементами единственным образом?

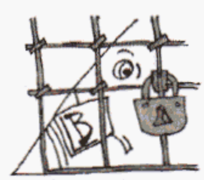


382 Построй треугольник ABC по двум сторонам a и b и углу A, прилежащему к стороне b. Является ли решение однозначным?



383 Построй треугольник ABC по двум сторонам a и c и углу B, заключенному между ними. Однозначно ли определяется треугольник этими элементами?





384 Проанализируй решение задач № 378–383 и сформулируй *гипотезу*: из равенства каких элементов двух треугольников следует равенство самих треугольников? Как можно назвать эти свойства равенства треугольников? Можно ли считать твою гипотезу верной для любых треугольников? Почему?

385 Построй биссектрисы углов A, B и C треугольника ABC, если треугольник ABC: а) остроугольный; б) прямоугольный; в) тупоугольный. Что ты замечаешь? Сформулируй *гипотезу*.

386 Построй серединные перпендикуляры к сторонам a, b и c треугольника ABC, если треугольник ABC: а) остроугольный; б) прямоугольный; в) тупоугольный. Что ты замечаешь? Сформулируй *гипотезу*.

387 Построй медианы сторон a, b и c треугольника ABC, если треугольник ABC: а) остроугольный; б) прямоугольный; в) тупоугольный. Что ты замечаешь? Сформулируй *гипотезу*.

388 Построй высоты треугольника ABC, проведенные к сторонам a, b и c, если треугольник ABC: а) остроугольный; б) прямоугольный; в) тупоугольный. Что ты замечаешь? Сформулируй *гипотезу*.

П **389** Вычисли, сопоставь ответам соответствующие буквы и расшифруй названия знаменитых геометрических задач древности:

а) **В** $-2+0,6$ **Д** $0,1-0,08$ **Т** $-0,15+0,2$ **Р** $0,54-5,4$

У $-0,8-0,4$ **Г** $0,3-3,1$ **К** $-0,5-0,06$ **А** $-1,32-7,68$

−0,56	−1,4	−9	0,02	−4,86	−9	0,05	−1,2	−4,86	−9

−0,56	−4,86	−1,2	−2,8	−9

б) **К** $-0,8\cdot(-3)$ **А** $-6,4:(-4)$ **Я** $0,24\cdot(-10)$ **У** $2,1:(-10)$

И $-0,42\cdot 5$ **Р** $-8:0,2$ **Г** $-4\cdot(-0,01)$ **Л** $-16:(-0,1)$

Т $(-0,8)^2$ **С** $0,72:(-0,9)$ **Ц** $-0,8\cdot(0,1)$ **Е** $0,64:(-0,1)^2$

0,64	−40	−2,1	−0,8	64	2,4	−0,08	−2,1	−2,4

−0,21	0,04	160	1,6

в) **К** $5,1-5,4$ **И** $-0,8\cdot(-0,6)$ **Б** $-8,2:0,41$ **Н** $0,45:(-0,1)$

О $-1,6\cdot 0,5$ **В** $3,4:(-17)$ **Ы** $-7,8+9,3$ **Е** $-8,1:30$

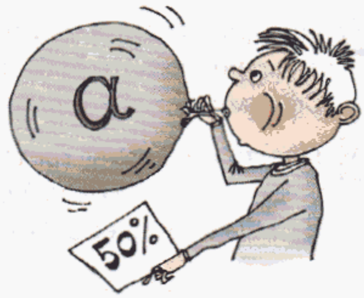
Д $-10+4,2$ **А** $-1,2-2,8$ **Л** $0,9\cdot(-0,04)$ **У** $-0,4\cdot(-0,15)$

0,06	−5,8	−0,2	−0,8	−0,27	−4,5	0,48	−0,27

−0,3	0,06	−20	−4

390 а) Первая сторона треугольника составляет 30% его периметра, а вторая – 25% периметра. Чему равна длина третьей стороны этого треугольника, если вторая сторона на 0,4 дм короче первой?
б) Первая сторона треугольника составляет 48% второй стороны, а третья сторона – на 0,8 см больше первой. На сколько процентов третья сторона треугольника меньше второй, если его периметр равен 5,7 см?

391 а) Увеличь число 12: на половину, на треть, на 10%, на 25%, на 100%, на 200%.
б) Уменьши число 60: на треть, на четверть, на 20%, на 50%, на 75%, на 90%.
в) Увеличь число a: на 4, на четверть, в 4 раза, на 30%, на 50%, на 250%.
г) Уменьши число b: на 5, на пятую часть, в 5 раз, на 10%, на 25%, на 70%.



392 **БЛИЦтурнир.**
а) Цена на товар увеличилась сначала на 30%, а потом еще на 20% от новой цены. На сколько процентов увеличилась цена товара по сравнению с первоначальной?
б) В школе за счет профилактических мероприятий число заболевших гриппом уменьшилось за первый год на 20%, а за второй – еще на 15% по сравнению с первым годом. На сколько всего процентов уменьшилось число заболевших гриппом в школе за эти два года?
в) Температура воздуха за ночь понизилась на 20%, а за день – повысилась на 20%. На сколько процентов и как изменилась температура воздуха за сутки?
г) За первый месяц число вкладчиков банка увеличилась на 10%, а за второй – уменьшилось на 10%. На сколько процентов и как изменилось число вкладчиков за эти два месяца?

393 В городе Пряничном мэр задумал ввести налог на пряники – каждый, кто покупает пряник, должен заплатить 20% от стоимости пряника в городскую казну. А заместитель мэра предложил поднять цену на пряники на 20% и забирать в казну 20% выручки продавцов. Какое из двух предложений (мэра или его заместителя) принесет в казну больше денег, если в обоих случаях покупать будут одинаково?

394 а) В треугольнике первая сторона на 50% больше второй, но на 25% меньше третьей. Меньшую сторону увеличили на 40%, а большую – увеличили на 25%. Как изменился периметр треугольника и на сколько процентов?
б) Одна сторона прямоугольника на 200% больше второй. Меньшую сторону увеличили на 30%, а большую – уменьшили на 30%. Как изменился периметр прямоугольника и на сколько процентов?

395 Сформулируй высказывания с использованием союза *«если..., то...»* и запиши их на математическом языке. Построй обратные высказывания. Как объединить прямое и обратное высказывания в одно предложение?

а) Параллельные прямые не имеют общих точек.

б) Перпендикулярные прямые пересекаются под прямым углом.

396 Построй обратные высказывания к данным общим высказываниям. Докажи, что обратные высказывания являются ложными, и построй их отрицания.

а) Вертикальные углы равны.

б) Сумма смежных углов равна 180°.

397 Прочитай определения и сделай рисунки. Назови определяемые понятия и понятия, на которые они опираются. В какой последовательности могут вводиться эти определения?

а) Перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону, называется высотой треугольника.

б) Отрезок AH называется перпендикуляром, проведенным из точки A к прямой a ($A \notin a$, $H \in a$), если прямые AH и a перпендикулярны.

в) Две прямые называются перпендикулярными, если они пересекаются под прямым углом.

г) Прямая, пересекающая прямую p и не перпендикулярная ей, называется наклонной к прямой p.

398 Вычисли наиболее удобным способом. Какие свойства чисел помогают упростить вычисления? Запиши их в буквенном виде.

а) $2{,}76 + 46{,}8 + 5{,}24 + 3{,}2$;

б) $0{,}01 + 0{,}02 + \ldots + 0{,}98 + 0{,}99$;

в) $\frac{11}{79} \cdot \frac{4}{9} \cdot 7\frac{2}{11} \cdot 2{,}25$;

г) $8 \cdot 40 \cdot 0{,}2 \cdot 1{,}25 \cdot 5 \cdot 0{,}25$.

399 Найди значения выражений:

а) $-a + \frac{1}{2}b + 0{,}4a - 0{,}5b$, если $a = 4{,}5$, $b = -0{,}78$;

б) $0{,}4(2n - 2{,}5) - 1{,}6(k - 0{,}5) - 0{,}8(n - k)$, если $n = 9{,}6$, $k = -5{,}25$.

400 Найди множество корней уравнения:

а) $2{,}4x - 1{,}5 = 0{,}2 - 0{,}6(3 - 4x)$;

б) $1{,}4y - 0{,}4(5y - 3) = -0{,}6(y - 2)$;

в) $9{,}2a + 36{,}9 = 4{,}8(12{,}6 - a) + 10{,}72$;

г) $-7{,}14 + 2{,}7b = 20{,}5 - 3{,}5(14{,}8 - b)$.

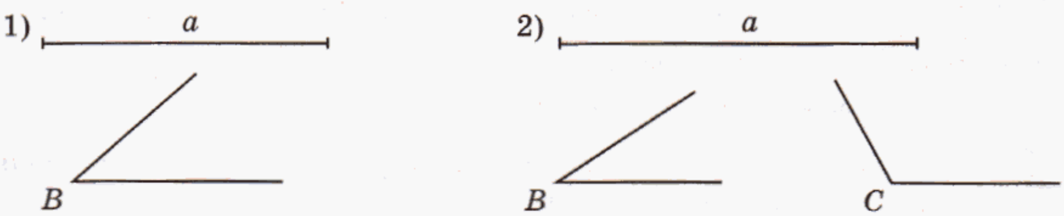
Д **401** Построй треугольник ABC по двум сторонам a и b. Сколько решений имеет эта задача?

a

b

402 Периметр треугольника ABC равен 17 см. Первая его сторона на 40% меньше второй стороны, а третья – на 3,8 см больше первой. Построй треугольник ABC.

403 Построй треугольник ABC: 1) по стороне a и прилежащему к ней углу B; 2) по стороне a и двум прилежащим к ней углам B и C. Сколько различных решений возможно в каждой из этих задач?



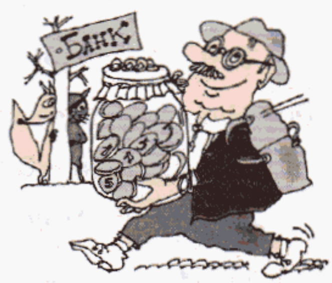
404 Построй треугольник ABC по двум сторонам b и c и углу A, заключенному между ними. Проведи биссектрису угла B.

405 Начерти произвольный треугольник ABC, построй середины его сторон – точки M, N и K – и соедини их отрезками. Измерь и сравни углы треугольников ABC и MNK. Что ты замечаешь? Сформулируй *гипотезу*.

406 Построй произвольный равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) и опусти высоту из вершины B на сторону AC. Что ты замечаешь? Сформулируй *гипотезу*.

407 Василий добежал от дома до школы за 5 мин и опоздал в школу на 1 мин. На сколько процентов ему нужно было увеличить скорость, чтобы не опоздать в школу?

408 Банк выплачивает вкладчикам доход в размере 12% годовых по вкладам. Пенсионер положил в этот банк 9000 р. Через 8 месяцев ему потребовались деньги, и он снял вклад. Какую сумму он получил в банке?



409 Найди квадрат суммы чисел A и B:

A $12,5 - 12,5 \cdot (0,726 - 5,562 : 5,4)$;

B $-0,24 \cdot (-1,625) : (38,1 : 7,5 - 4,3) + 11,7 : (-1,5)$.

410 Найди множество корней уравнения:

а) $4,8x - 0,7(2 - x) = 0,5(11x - 7)$; б) $0,4(5x - 9) - 3,8x = 1,8 - 1,8(x + 3)$.

411 Костя решал пример на черновике, затем переписал его в тетрадь, но забыл расставить скобки. Расставь скобки в Костином примере так, чтобы получилось верное равенство:

$$0{,}3 : 0{,}6 - 0{,}8 \cdot 0{,}5 - 0{,}9 = 0{,}12.$$

С **412** Найди площадь фигуры, составленной из 9 квадратов (рис. 31), если ее периметр равен 32 см.

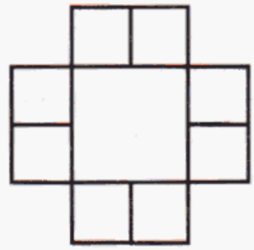


Рис. 31

413 Найди последнюю цифру числа:

$111 \cdot 222 \cdot 333 \cdot 444 \cdot 555 \cdot 666.$

414 В магазине после снижения цен на яблоки их продали за день на 50% больше, чем продавали в день до снижения цен. Выручка за день возросла при этом на 12,5%. На сколько процентов была снижена цена?

415 Прямоугольный кусок волшебной кожи («шагреневая кожа») исполняет любые желания своего владельца, но после каждого исполнения желания он уменьшается на половину своей длины и на одну треть ширины. После исполнения 5 желаний он имел площадь 12 см², а после двух желаний его ширина была 9 см. Какой была его длина после исполнения первого желания?

4. Замечательные точки в треугольнике.

Треугольник – одна из самых простых геометрических фигур. Многие свойства треугольника были открыты еще в глубокой древности. Но с течением времени оказалось, что этот простой геометрический объект поистине неисчерпаем.

Мы познакомимся лишь с некоторыми известными свойствами треугольника. Несмотря на свою простоту, они не перестают удивлять и восхищать всех тех, кто умеет думать и наблюдать. Наверное, отсюда и идет название этих свойств, столь необычное для научных понятий, – «замечательные».

На данном этапе мы будем изучать треугольник с помощью построений. Для этого нам понадобятся циркуль, линейка и *остро* заточенный карандаш – иначе точности построений не добиться.

В учебнике, чтобы не загромождать чертеж, не отмечены те построения, которые были разобраны в прошлом пункте. Однако при воспроизведении чертежей на бумаге вспомогательные линии лучше не убирать – так легче будет проследить ход решения.

Центр описанной окружности

Начертим произвольный треугольник ABC и проведем серединные перпендикуляры к его сторонам. Если построение выполнено точно, то все перпендикуляры пересекутся в одной точке – точке O. Обратим внимание, что расположение точки O зависит от вида треугольника: у остроугольного треугольника он находится внутри (рис. 31), у прямоугольного – на гипотенузе (рис. 32), а у тупоугольного – снаружи (рис. 33).

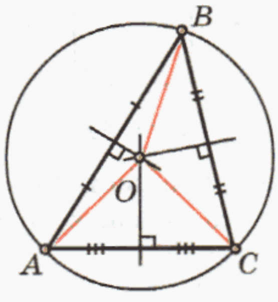


Рис. 31

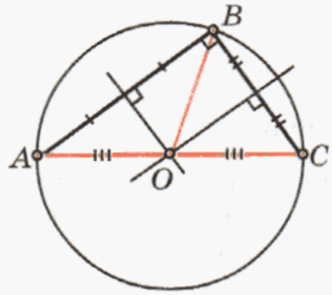


Рис. 32

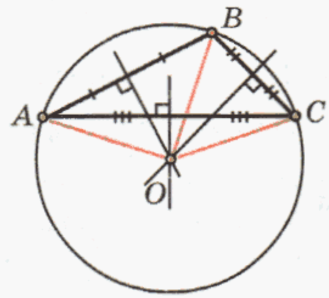


Рис. 33

С помощью измерений можно убедиться, что точка O равноудалена от всех вершин треугольника ABC. Значит, если провести окружность с центром в точке O, проходящую через одну из вершин данного треугольника , то она пройдет и через две другие его вершины.

Окружность, проходящая через все вершины треугольника, называется **описанной** около него. Поэтому найденное свойство треугольника можно сформулировать как *гипотезу*:

> ***Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в центре описанной окружности.***

Точное доказательство этого свойства, как и других утверждений, приведенных ниже, будет дано в курсе геометрии 7–9 классов. А сейчас наша задача состоит в выявлении этих удивительных и красивых геометрических закономерностей и их формулировке в форме гипотез.

Центр вписанной окружности

В произвольном треугольнике ABC проведем биссектрисы его углов. И вновь при точном построении мы увидим, что все три биссектрисы пересекутся в одной точке D (рис. 34).

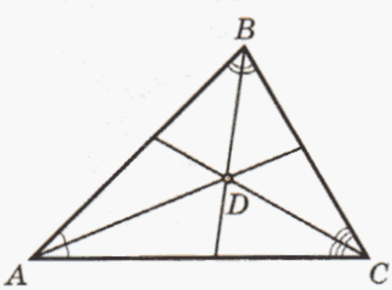


Рис. 34

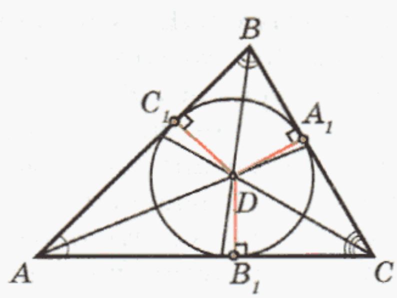


Рис. 35

Точка D – тоже необычная. Если опустить из нее перпендикуляры DA_1, DB_1 и DC_1 на стороны треугольника ABC, то можно обнаружить, что все они равны между собой: $DA_1 = DB_1 = DC_1$ (рис. 35).

Если провести окружность с центром в точке D и радиусом DA_1, то она будет касаться всех трех сторон треугольника (то есть будет иметь с каждой из них только одну общую точку). Такая окружность называется **вписанной** в треугольник. Найденное свойство можно сформулировать так:

Биссектрисы углов треугольника пересекаются в центре вписанной окружности.

Ортоцентр

Если из вершин произвольного треугольника провести перпендикуляры на противоположные стороны (их называют **высотами**), то все они пересекутся в одной точке H (рис. 36). Эта точка называется **ортоцентром**.

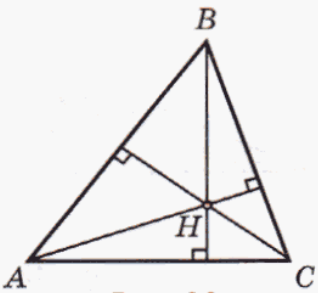


Рис. 36

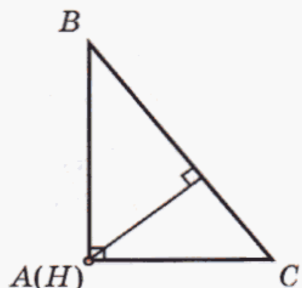


Рис. 37

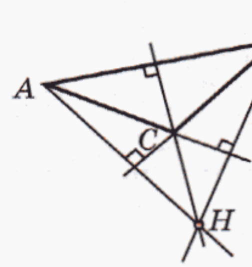


Рис. 38

С помощью построений можно проверить, что в зависимости от вида треугольника ортоцентр располагается по-разному: у остроугольного треугольника он располагается внутри него, у прямоугольного – в вершине прямого угла, а у тупоугольного – снаружи (рис. 36–38).

Итак, мы познакомились еще с одной замечательной точкой треугольника:

Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в ортоцентре.

Точка пересечения медиан

Построим середины сторон треугольника и проведем отрезки, соединяющие каждую вершину с серединой противолежащей стороны. Такие отрезки называются **медианами**. И вновь мы наблюдаем, что и эти отрезки пересекаются в одной точке (рис. 39).

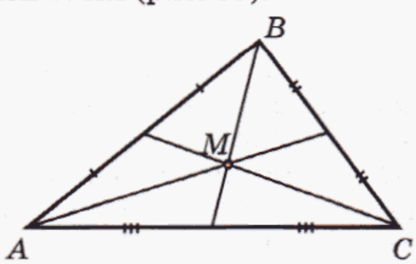


Рис. 39

Если мы измерим длины получившихся отрезков медиан, то сможем проверить еще одно свойство: точка пересечения медиан делит их в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Это свойство медиан треугольника можно сформулировать так:

Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Мы познакомились с четырьмя замечательными точками треугольника. Но свойства этих точек далеко не исчерпывают всех свойств треугольника. Приведем лишь некоторые открытия великого математика Леонарда Эйлера (1707– 1783 гг.). Он доказал, что центр описанной окружности треугольника ABC совпадает с точкой пересечения окружностей, описанных около треугольников AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C, где A_1, B_1 и C_1 – середины сторон AC, CB и AB (рис. 40).

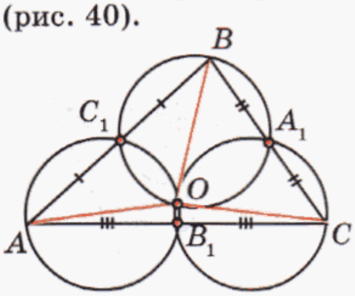


Рис. 40

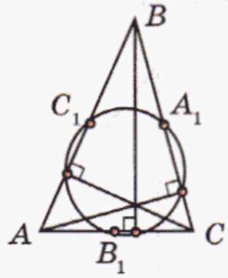


Рис. 41

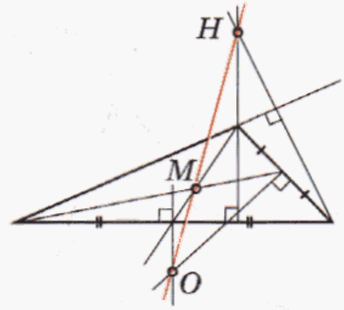


Рис. 42

А вот еще одно открытие Эйлера: окружность, проходящая через середины сторон треугольника, пройдет и через основания его высот (рис. 41).

Удивительным является и то, что некоторые из четырех замечательных точек связаны определенными соотношениями. Например, точка пересечения медиан M, ортоцентр H и центр описанной окружности O лежат на одной прямой, причем точка M делит отрезок OH в отношении 1 : 2 (рис. 42).

К **416** Построй окружность, описанную около треугольника ABC, если треугольник ABC: а) остроугольный; б) прямоугольный; в) тупоугольный.

417 Построй окружность, вписанную в треугольник ABC, если треугольник ABC: а) остроугольный; б) прямоугольный; в) тупоугольный.

418 Построй ортоцентр треугольника ABC, если треугольник ABC: а) остроугольный; б) прямоугольный; в) тупоугольный.

419 **Практическая работа.**
Точка пересечения медиан является одновременно ***центром тяжести*** треугольника. Чтобы познакомиться с этим свойством, начерти на плотном листе картона произвольный треугольник ABC и найди точку O пересечения его медиан. Затем вырежь треугольник ABC, расположи его горизонтально и помести на вертикальный стержень (например, на острие карандаша или ручки) сначала в точке O, а потом в других точках. Что ты наблюдаешь?

420 Сравни дроби:

а) 3,6 и 3,600; в) 0,207 и 0,21; д) 1,76 и 1,756;
б) 0,4 и 0,09; г) 5,03 и 4,98; е) 0,0938 и 0,1.

421 Прочитай число: 0,2803951476. Зачеркни пять цифр так, чтобы получилось: а) возможно большее число; б) возможно меньшее число.

422 Расположи числа в порядке возрастания, сопоставь их соответствующим буквам и расшифруй имя великого ученого-геометра античности:

0,51;	0,05;	0,1;	0,508;	0,058;	0,008;	0,8;	0,5;	0,015.
И	О	Л	Н	Л	А	Й	О	П

423 Выполни действия:

а) $-0,286 - 18,4$; д) $-2,002 \cdot 2,9$;
б) $17,9 - 20,205$; е) $-4,06 \cdot (-20,5)$;
в) $-5,98 + 48,004$; ж) $-0,7752 : (-1,9)$;
г) $-3,08 - 4,192$; з) $218,08 : (-7,25)$.

424 Закончи предложение:

«Несократимую дробь можно записать в виде конечной десятичной дроби *в том и только том случае*, когда ее знаменатель не имеет простых делителей, кроме ...»

425 Найди дроби, которые можно перевести в десятичные, и выполни перевод:

а) $\frac{17}{2^2 \cdot 5}$; $\frac{9}{2 \cdot 5^3}$; $\frac{5}{3 \cdot 2^2}$; $\frac{12}{2^3 \cdot 3}$; $\frac{10}{7 \cdot 5^2}$; $\frac{24}{3 \cdot 2^4 \cdot 5^2}$;

б) $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{9}{60}$; $\frac{7}{25}$; $\frac{3}{8}$.

426 Реши примеры по столбцам и предложи правило, по которому можно было бы записать следующее число в ряду ответов:

а) $4,2 \cdot \frac{1}{3}$ б) $1 : 1,2$ в) $1\frac{1}{9} - 3$
$6 - 3\frac{1}{2}$ $3\frac{9}{35} - 2,4$ $-\frac{1}{2} : \frac{5}{28}$
$9,6 : 2\frac{2}{3}$ $1\frac{1}{6} \cdot 0,75$ $1,3 \cdot (-2\frac{8}{11})$

427 Докажи, что данную дробь нельзя перевести в конечную десятичную, и запиши ее в виде бесконечной периодической дроби, указав период:

а) $\frac{4}{9}$; б) $\frac{7}{30}$; в) $\frac{5}{12}$; г) $\frac{6}{11}$; д) $\frac{35}{6}$; е) $\frac{23}{18}$; ж) $\frac{47}{22}$; з) $\frac{25}{3}$.

Образец: $\boxed{\frac{23}{15} = 1,5333... = 1,5(3); \quad \frac{11}{27} = 0,407407... = 0,(407).}$

428 Замени данную обыкновенную дробь десятичной с точностью до целых, десятых, сотых, тысячных:

а) $\frac{59}{17}$; б) $\frac{77}{26}$; в) $\frac{96}{49}$; г) $\frac{127}{31}$.

429 Автомобиль проехал расстояние от A до B со скоростью v_1 км/ч за t_1 часов, а обратный путь от B до A – за t_2 часов. Запиши с помощью буквенного выражения, чему равны:
а) расстояние от A до B;
б) скорость v_2 движения от B до A;
в) общее время движения туда и обратно;
г) средняя скорость движения за все время пути.

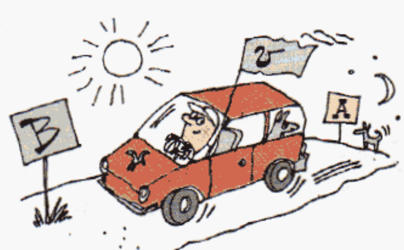
430 а) Поезд длиной 400 м прошел мимо неподвижного наблюдателя за 20 с. За сколько времени он проедет тоннель длиной 400 м?
б) Поезд проехал с одной и той же скоростью мимо столба за 7 с, а вдоль платформы длиной 378 м – за 25 с. Чему равна скорость и длина поезда?

431 Турист выехал на велосипеде из пункта A. Проехав 1,5 ч со скоростью 16 км/ч, он сделал остановку на 0,5 ч, а затем продолжил путь с первоначальной скоростью. Через 3 ч после выезда первого туриста из пункта A по той же дороге выехал на мотоцикле второй турист со скоростью 56 км/ч. На каком расстоянии от пункта A второй турист догонит первого?

432 От станции A в 12 ч отправился товарный поезд. В 14 ч с той же станции вышел пассажирский поезд, который догнал товарный в 20 ч. Чему равна скорость обоих поездов, если сумма их скоростей равна 140 км/ч?

433 Грузовик выехал из села A в 10 ч. Через 15 мин из того же села в противоположном направлении выехал мотоциклист, скорость которого была на 20% меньше скорости грузовика. Чему равны скорости грузовика и мотоциклиста, если в 11 ч расстояние между ними составило 96 км?

434 Из города A в 9 ч 30 мин выехал автомобиль, а в 11 ч в том же направлении выехал автобус. В 12 ч 15 мин расстояние между автомобилем и автобусом составило 130 км. В котором часу автобус прибудет в пункт B, если скорость автомобиля на 40% больше скорости автобуса, и автомобиль прибыл в пункт B в 12 ч 30 мин?

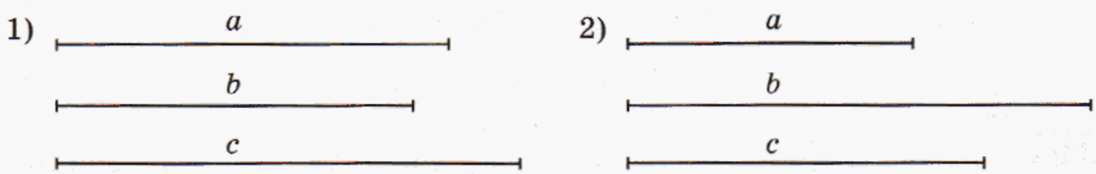


435 Катер проплыл расстояние между двумя пристанями по течению реки за 1,5 ч, а против течения – на 15 мин дольше. Чему равна собственная скорость катера, если скорость течения реки равна 2 км/ч?

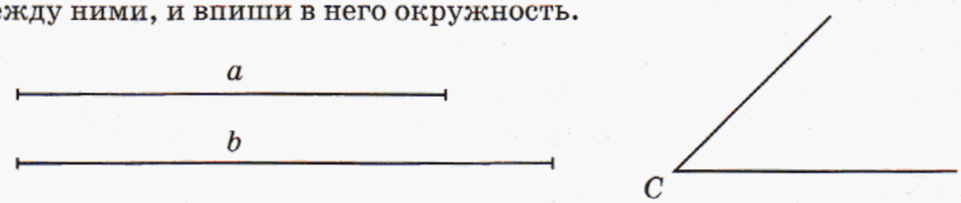
436 Моторная лодка шла 40 мин по течению реки и 1 ч 30 мин против течения. За все это время она прошла 41,4 км. Чему равна скорость течения реки, если скорость лодки по течению на 20% больше ее скорости против течения?

437 Теплоход проплыл некоторое расстояние по озеру за 6 ч, а то же расстояние по течению реки – за 5 ч. Сколько времени понадобится плоту, чтобы проплыть это же расстояние по реке?

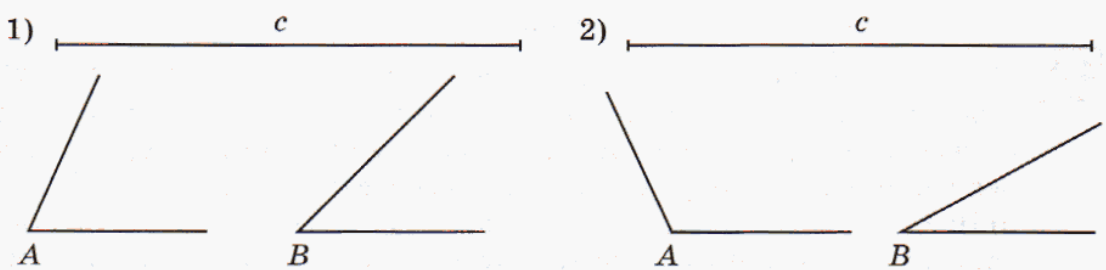
Д **438** Построй треугольник ABC по трем сторонам a, b и c и опиши около него окружность.



439 Построй треугольник ABC по двум сторонам a и b и углу C, заключенному между ними, и впиши в него окружность.

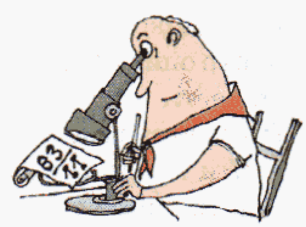


440 Построй треугольник ABC по стороне c и двум прилежащим к ней углам A и B. Построй центр тяжести треугольника ABC.



441 Замени данную обыкновенную дробь десятичной с точностью до целых, десятых, сотых, тысячных:

а) $\frac{83}{11}$; б) $\frac{40}{39}$; в) $\frac{70}{27}$; г) $\frac{214}{43}$.



442 Трамвай проехал мимо светофора за 2 с, а по мосту длиной 175 м – за 16 с. Чему равна длина трамвая?

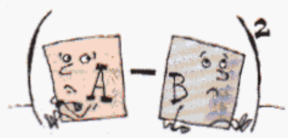
443 Находясь в пункте A на дороге, Таня увидела своего младшего брата, который появился на дороге в пункте B. Вместо того, чтобы пойти навстречу сестре, он направился в противоположную сторону, а Таня побежала за ним. Сколько минут продолжалась «погоня», если расстояние от A до B Таня преодолела за 3 мин, а скорость брата на 60% меньше, чем у нее?

444 Плот и яхта плывут по реке навстречу друг другу. В 15 ч 30 мин расстояние между ними было 90 км, а в 16 ч 10 мин оно сократилось до 70 км. Чему равна собственная скорость яхты?

445 Найди квадрат разности чисел A и B:

$\boxed{A}$ $(37{,}8 : 7{,}5 - 2{,}6 \cdot 1{,}4) \cdot \left(-1\frac{5}{7}\right) + 7 : \left(-2\frac{1}{3}\right)$;

$\boxed{B}$ $\left(7\frac{4}{9} - 8\right) \cdot 3{,}6 - 1{,}6 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{3}{4}\right) + 1\frac{2}{5} : (-0{,}35)$.



446 Выполни действия и зачеркни числа в квадрате по образцу (каждое число принадлежит только одному ответу):

а) $0{,}078 + 15{,}382$;
б) $4{,}245 + 5{,}86$;
в) $7{,}1 - 6{,}937$;
г) $15{,}20316 - 9{,}7026$;
д) $5{,}872 \cdot 0{,}45$;
е) $23{,}6 \cdot 3{,}05$;
ж) $15{,}9258 : 0{,}762$;
з) $18{,}78 : 37{,}5$.

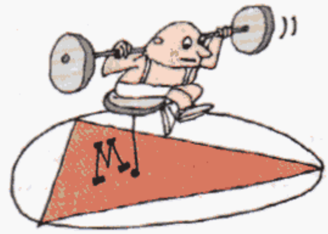
7	1	0,	1	6	4
1,	9	0,	0	2,	2
1	8	1	5	0,	4
5,	4	6	3	5	0
5,	6	5	6	2	0
5	0	0	9	0,	8

C **447** В произвольном треугольнике ABC построй точку A_1 – середину стороны BC, точку B_1 – середину стороны AC, и точку C_1 – середину стороны AB. Построй окружности, описанные около треугольников AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C. Что ты замечаешь?

448 а) В произвольном треугольнике ABC проведи высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Построй окружность, описанную около треугольника $A_1B_1C_1$, и найди точки ее пересечения со сторонами треугольника ABC. Определи свойство тех точек пересечения, которые не являются основаниями высот.

б) Найди отношения отрезков, на которые построенная окружность делит отрезки AH, BH и CH, где H – ортоцентр треугольника ABC. Что ты замечаешь?

449 В произвольном треугольнике ABC построй центр описанной окружности – точку O, центр тяжести – точку M, и ортоцентр – точку H. Рассмотри взаимное расположение точек O, M и H и найди отношение отрезков $OM : MH$. Что ты замечаешь? Сформулируй *гипотезу*.



§ 2. Геометрические фигуры в пространстве

1. Пространственные фигуры и их изображение.

До сих пор мы рассматривали только фигуры на плоскости – и это понятно, ведь геометрия произошла от землемерия, а значит, от исследования свойств именно плоских фигур. Но предметы окружающего нас мира имеют пространственную форму, поэтому в геометрии рассматриваются как **плоские**, так и **пространственные** фигуры. Из названий ясно, что все точки плоской фигуры располагаются в одной плоскости, а пространственной – нет. Наблюдаемые нами пространственные фигуры называют также ***геометрическими телами***.

Мы уже встречались с такими пространственными фигурами, как прямоугольный параллелепипед, куб, пирамида, цилиндр, шар, конус (рис.43), знакомились с некоторыми их свойствами.

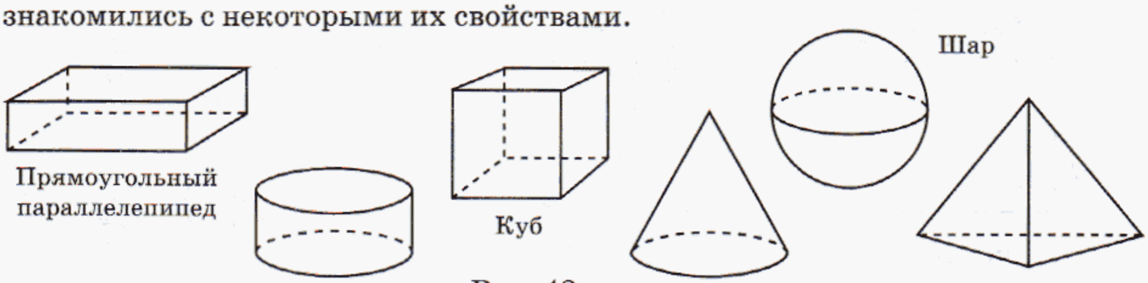


Рис. 43

Однако при исследовании свойств геометрических тел мы сразу же сталкиваемся с проблемой их изображения, поскольку зрительный образ пространственной фигуры не всегда совпадает с ее реальной формой: окружность превращается в эллипс – «сплющенную» окружность, изменяются углы между прямыми и отрезками и т. д. Поэтому вначале рассмотрим некоторые правила, позволяющие приблизить изображение пространственной фигуры к ее естественно воспринимаемому образу.

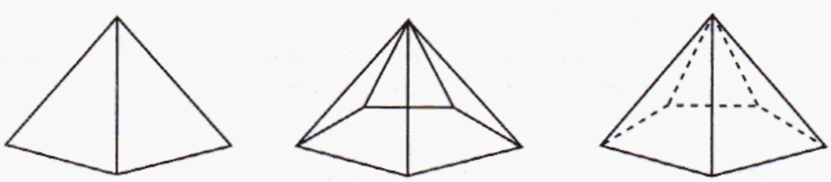


Рис. 44

На рис. 44 изображена одна и та же пирамида. В первом случае видны лишь ее передние грани, и по такому рисунку нельзя даже определить, какой многоугольник лежит в ее основании. На втором рисунке пирамида стала прозрачной – мы видим все ее ребра, грани, но по этому рисунку не ясно, как линии расположены в пространстве. Поэтому в геометрии договорились **линии, которые скрыты от глаз наблюдателя, изображать не сплошными, а пунктирными**, как на третьем рисунке.

Еще одно правило, помогающее сделать рисунок фигуры более понятным: на пространственном чертеже **сохраняется параллельность прямых и отношение параллельных отрезков**. Именно так мы всегда и поступаем, изображая параллельные ребра куба и параллелепипеда.

Исследование свойств пространственной фигуры можно проводить, строя ее сечения плоскостью. А виды сечений определяются взаимным расположением геометрического тела и секущей его плоскости. Рассмотрим лишь один пример.

Пусть требуется изобразить сечение куба плоскостью α, проходящей через точки M, N и K на ребрах куба (рис. 45). Решить эту задачу помогает свойство плоскостей, которое мы наблюдаем ежедневно, листая книгу или тетрадь: *две различные непараллельные плоскости пересекаются по прямой*. Вместе с тем мы знаем, что для проведения прямой достаточно иметь любые *две* ее точки. Значит, наша задача сводится к нахождению двух общих точек плоскости α и каждой грани куба, которую она пересекает.

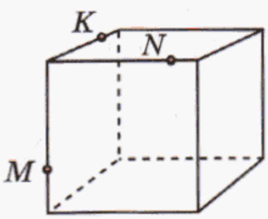


Рис. 45

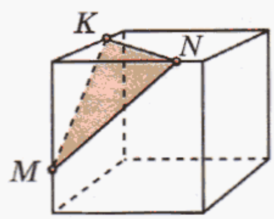


Рис. 46

Теперь обратимся к чертежу. Точки M и N принадлежат одновременно плоскости α и передней грани куба, поэтому плоскость α пересекает переднюю грань по отрезку MN (рис. 46).

Аналогично пересечением плоскости α с верхней гранью является отрезок NK, а с боковой гранью – отрезок KM. Плоскость α будто отсекает от куба один из углов, и в сечении получается треугольник MNK.

В завершение заметим, что иногда для более ясного представления о фигуре (например, рис. 47) изображают ее вид спереди, слева и сверху, как бы «фотографируют» ее с разных сторон (рис. 48). Полученные «чертежи-фотографии» называют *проекциями*. Поэтому полезно научиться по пространственному изображению фигуры строить ее проекции, и наоборот.

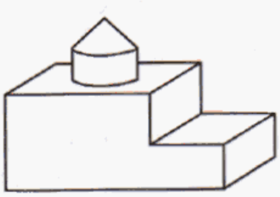
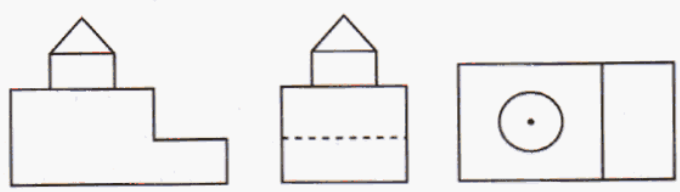


Рис. 47

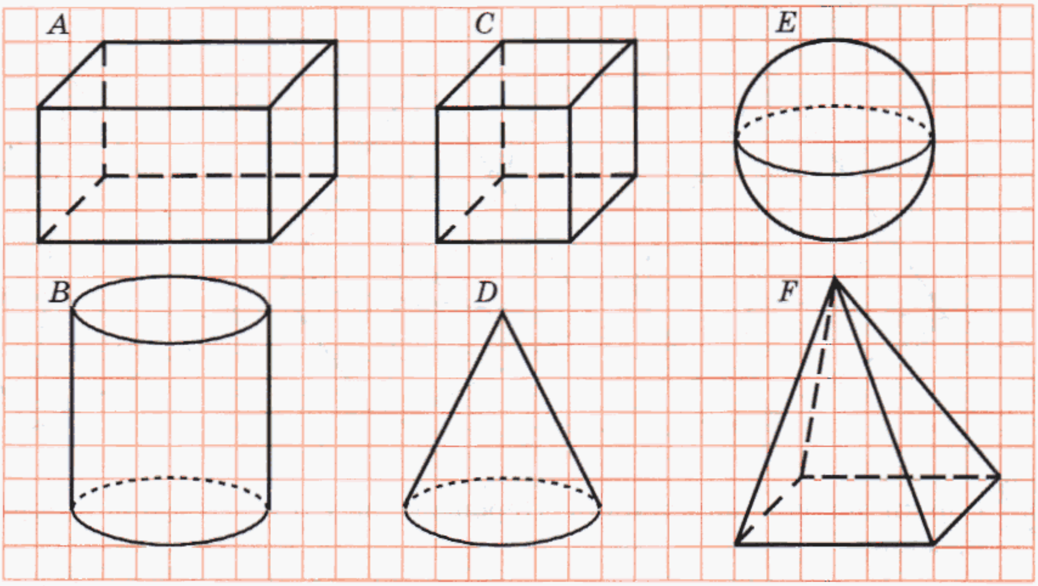


Вид спереди Вид слева Вид сверху

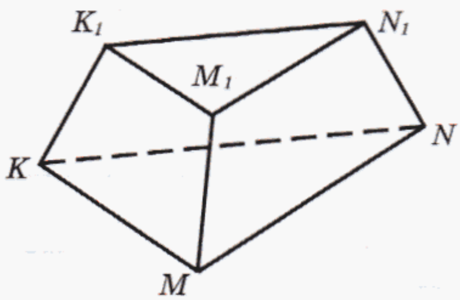
Рис. 48

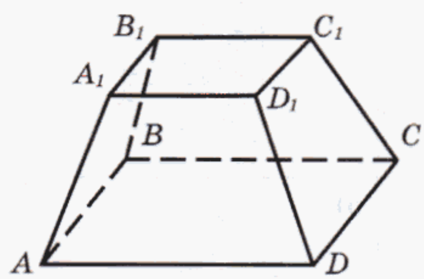
450 Найди в окружающей обстановке предметы, имеющие форму куба, прямоугольного параллелепипеда, шара, пирамиды, цилиндра, конуса.

451 Какие геометрические тела изображены на рисунке? Перерисуй их по клеточкам в тетрадь.



452 а) На рисунках изображены фигуры, которые называются «усеченными пирамидами». Что в них общего и чем они отличаются?

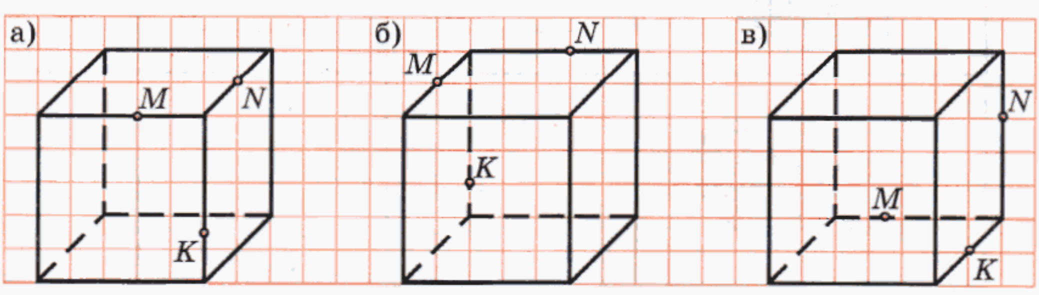




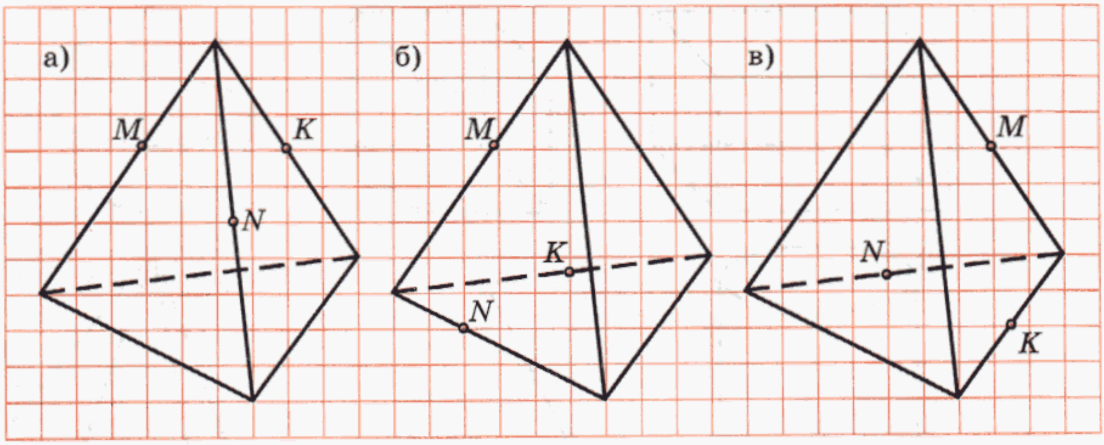
б) Какие плоские фигуры ограничивают усеченные пирамиды? Какие из них являются видимыми для наблюдателя, а какие – нет?

в) По аналогии с усеченными пирамидами начерти «усеченный конус».

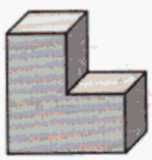
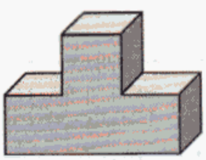
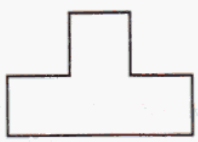
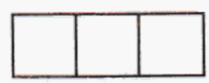
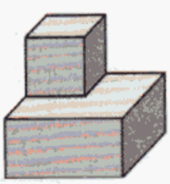
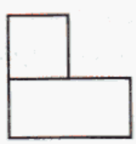
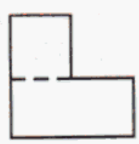
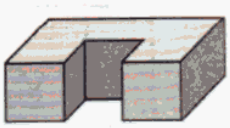
453 Перенеси рисунок куба в тетрадь и построй его сечение плоскостью, проходящей через точки M, N и K. Проверь правильность построения с помощью модели куба.



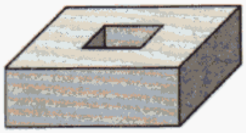
454 Перерисуй пирамиду в тетрадь и построй ее сечение плоскостью, проходящей через точки M, N и K. Построй модель этого сечения из палочек и пластилина.

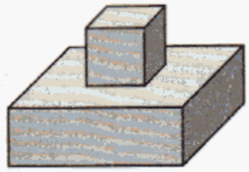


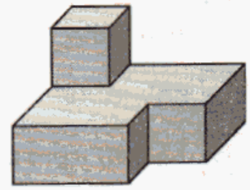
455 Сложи фигуры из кубиков. Перенеси рисунки в тетрадь и дорисуй их проекции.

Фигура	Вид спереди	Вид слева	Вид сверху
а) 	?		
б) 		?	
в) 			?
г) 	?	?	?

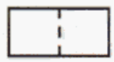
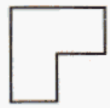
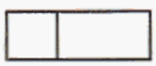
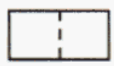
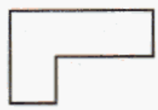
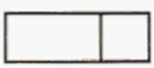
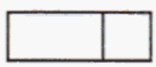
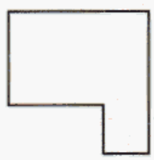
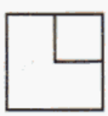
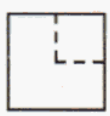
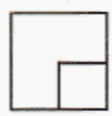
456 По рисункам фигур изобрази их проекции. Проверь свои изображения, сложив фигуры из кубиков.

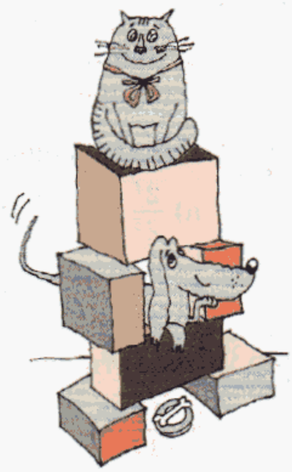
а) 

б) 

в) 

457 По данным проекциям фигуры сложи ее из кубиков и нарисуй.

	Вид спереди	Вид слева	Вид сверху
а)			
б)			
в)			
г)			



458 Закончи предложения так, чтобы получились истинные высказывания, и запиши их на математическом языке. Что объединяет эти предложения? Подбери для них общее название.

а) Если каждое из двух чисел делится на некоторое число, то их сумма …

б) Если одно из двух чисел делится на некоторое число, а другое – не делится на это число, то их сумма …

в) Если одно из двух чисел делится на некоторое число, то их произведение …

г) Если первое число делится на второе число, а второе число делится на третье, то …

459 Сформулируй признаки делимости на 10, 2, 5, 3, 9, используя обороты: «*если и только если*», «*тогда и только тогда*», «*необходимо и достаточно*». Какие два логические следования в них содержатся? Почему для их названия используется слово «**признаки**»?

460 Найди истинные высказывания и составь из соответствующих им букв название учебника по геометрии, который использовался более 2000 лет. Кто его автор?

О	285 является делителем 3	**А**	$3 \cdot 140 \cdot 17$ кратно 10
Н	17 500 кратно 100	**Д**	815 + 72 413 делится на 5
Р	3048 делится на 2 и на 9	**Е**	9 не является делителем $34 \cdot 567$
А	123 456 кратно 6	**Л**	6402 – 78 кратно 3
В	54 207 не делится на 9	**А**	$279 + 1300 \cdot 45$ делится на 9
Ч	15 не является делителем 73 510	**Й**	$70\,707 \cdot 160 \cdot 23$ не кратно 30

461 1) Что значит – сократить дробь? Сформулируй определение. На какие понятия оно опирается?
2) Запиши на математическом языке *основное свойство дроби*. Пользуясь им, определи, увеличивается или уменьшается дробь при сокращении?

462 Найди значения выражений:

а) $\frac{2^4}{2^5}$; в) $\frac{5^2}{2 \cdot 5^3}$; д) $\frac{15 \cdot 2}{15 \cdot 2 + 8 \cdot 15}$; ж) $\frac{525}{2 \cdot 5^3 \cdot 7}$;

б) $\frac{3^4}{3^2}$; г) $\frac{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^4 \cdot 3 \cdot 5^3}$; е) $\frac{54 \cdot 14 - 14 \cdot 6}{54 \cdot 14 + 6 \cdot 14}$; з) $\frac{36 + 18 \cdot 7}{36 - 18 \cdot 7}$.

463 Сократи дроби с натуральными числителями и знаменателями:

а) $\frac{12ab}{15b^2}$; в) $\frac{10m^3n}{15b^2}$; д) $\frac{xy - xz}{xy + xz}$; ж) $\frac{cd^2 + c^3}{c^2d + d^3}$;

б) $\frac{14xy}{21xyz}$; г) $\frac{36c^2d}{45c^3d^3}$; е) $\frac{a^2 - ab}{ab - b^2}$; з) $\frac{a^2 - 1}{a^3 - a}$.

464 Для тиражирования рукописи были использованы две копировальные машины. Первая машина может выполнить всю работу за 20 мин, а вторая – за полчаса. За сколько минут они размножат эту рукопись, работая вместе?

465 На путь между городами A и B один поезд тратит 2 ч, а второй – 1 ч 45 мин. Через какое время они встретятся, если выедут одновременно навстречу друг другу из городов A и B?

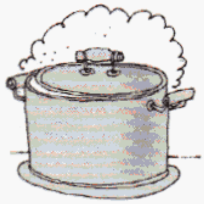
466 Через первую трубу бассейн можно наполнить водой за 5 ч 20 мин, а через вторую трубу – опорожнить наполненный бассейн за 12 ч. За сколько времени наполнится пустой бассейн, если обе трубы будут открыты одновременно?

467 Три каменщика выложили фронтон дома за 5 ч. Первый каменщик один может выложить фронтон за 12 ч 30 мин, а второй – за 18 ч 45 мин. За сколько времени может выполнить эту работу один третий каменщик?

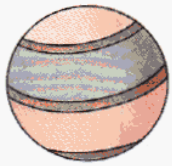
468 а) Два экскаватора, работая вместе, могут вырыть котлован за 48 ч. За какое время может вырыть котлован каждый из них в отдельности, если второй работает в 1,5 раза быстрее, чем первый?
б) Два портальных крана, работая вместе, разгрузили баржу за 8 ч. За какое время может разгрузить баржу каждый кран в отдельности, если производительность первого крана на 20% меньше, чем второго?

Д **469** Изобрази в тетради форму предметов, которые ты видишь на рисунке.

а)



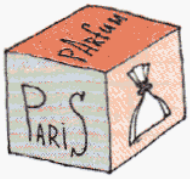
в)



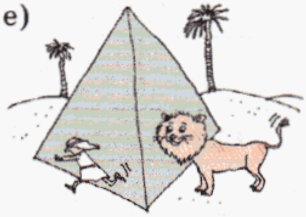
д)

б)

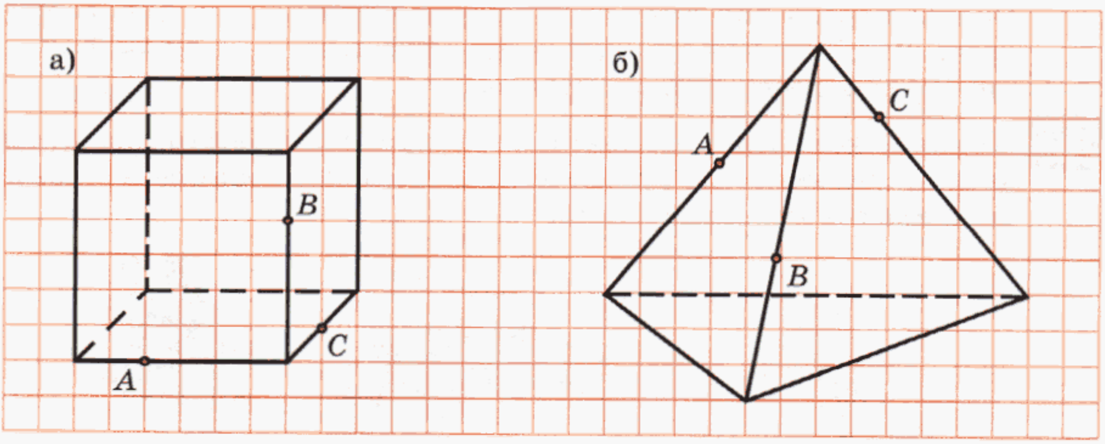
г)



е)



470 Перенеси рисунок фигуры в тетрадь и построй ее сечение плоскостью, проходящей через точки A, B и C. Проверь правильность построения с помощью предметных моделей.



471 Сократи дроби с натуральными числителями и знаменателями:

а) $\frac{825}{2750}$; б) $\frac{121212}{212121}$; в) $\frac{2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2}$; г) $\frac{32x^2y}{24xy^2}$; д) $\frac{ab+a}{ab-a}$.

472 Трое рабочих отремонтировали квартиру за 4 дня. Первый, работая один, может отремонтировать эту квартиру за 10 дней, а второй – за 12. За сколько дней сможет отремонтировать ее третий рабочий?

473 Рыжий и серый коты вместе могут съесть миску сметаны за 6 мин. За сколько времени может съесть эту сметану каждый кот в отдельности, если рыжий кот ест сметану на 25% быстрее, чем серый?

474 Выполни действия, сопоставь ответам соответствующие буквы и расшифруй слова. Что они означают?

А $-1\frac{3}{4}+0{,}25$ **М** $-\frac{3}{8}\cdot 0{,}32$ **Я** $-0{,}42:0{,}4$ **Р** $(-0{,}4)^2$

И $3{,}4-45$ **О** $-0{,}4\cdot(-0{,}25)$ **Н** $36{,}18:(-1{,}8)$ **Е** $-0{,}4^2$

Т $-2{,}8-3\frac{1}{5}$ **С** $2{,}6\cdot\left(-1\frac{3}{5}\right)$ **П** $-1{,}53:(-1{,}5)$ **Л** $(-0{,}2)^3$

–4,16	–6	–0,16	0,16	–0,16	0,1	–0,12	–0,16	–6	0,16	–41,6	–1,05

1,02	–0,008	–1,5	–20,1	–41,6	–0,12	–0,16	–6	0,16	–41,6	–1,05

С **475** Белый куб с ребром 3 см покрасили краской и распилили на кубики с ребром 1 см (рис. 49). Сколько всего получилось кубиков? Сколько среди них имеют одну окрашенную грань, 2 окрашенные грани, 3 окрашенные грани? Сколько неокрашенных кубиков?

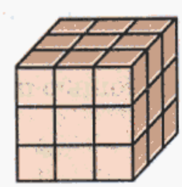


Рис. 49

476 В стаде 8 овец. Первая съедает копну сена за 1 день, вторая – за 2, третья – за 3, … , восьмая – за 8 дней. Кто быстрее съест копну сена – две первые овцы или все остальные вместе?

2. Многогранники.

Среди множества разнообразных геометрических тел выделяют классы фигур, обладающих общим признаком. Один из таких классов образуют **многогранники** – геометрические тела, поверхность которых состоит из граней, то есть частей плоскости, ограниченных многоугольниками (рис. 50). Стороны этих многоугольников называются **ребрами** многогранника, а вершины – **вершинами** многогранника.

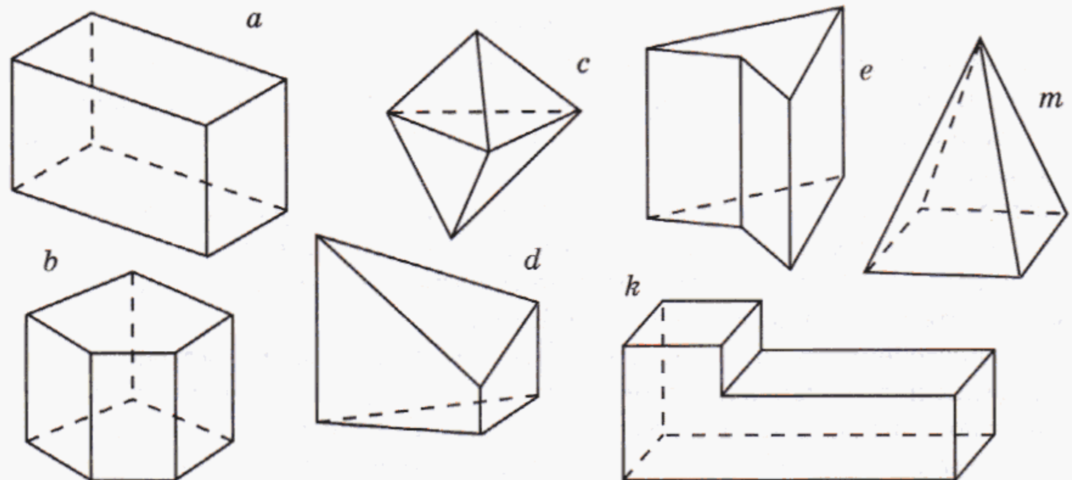


Рис. 50

Если поверхность многогранника удается разрезать по некоторым ребрам так, чтобы ее можно было развернуть на плоскости, то получится фигура, которую называют **разверткой** многогранника. На рис. 51 показано, как можно получить развертку куба. В зависимости от того, по каким ребрам сделаны разрезы, развертки могут быть разными.

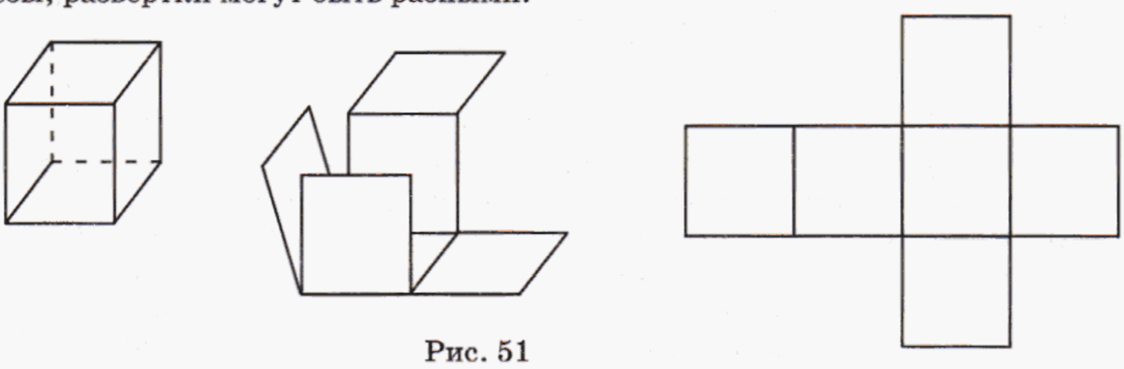


Рис. 51

С другой стороны, чтобы из бумаги сделать многогранник, обычно чертят его развертку, вырезают ее, сгибают по ребрам и склеивают.

В множестве многогранников можно выделить различные классы и подклассы: пирамиды, параллелепипеды и т.д. Некоторые из этих многогранников нам уже встречались. Рассмотрим их более подробно.

На рис. 52 изображены **пирамиды**. У пирамиды *основанием* является многоугольник, а боковые грани – треугольники с общей вершиной.

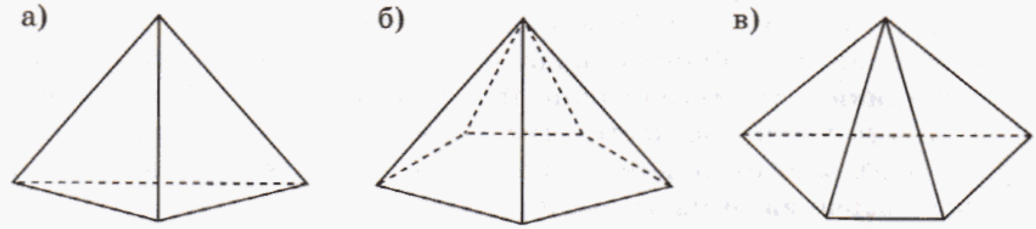


Рис. 52

В зависимости от числа сторон многоугольника, лежащего в основании пирамиды, она называется треугольной, четырехугольной, пятиугольной и т. д. Число граней и число вершин n-угольной пирамиды всегда равно $n+1$, а число ребер равно $2n$.

Самым простым многогранником является треугольная пирамида (рис. 52а). Поверхность треугольной пирамиды состоит из четырех треугольников, поэтому треугольную пирамиду называют еще *тетраэдром* (от латинского *tetra* – четыре). Установим некоторые его свойства.

При пересечении тетраэдра с плоскостью могут образоваться точка, отрезок, треугольник или четырехугольник. Например, на рис. 53 сечением тетраэдра плоскостью α, проходящей через точки M, N и K, является треугольник MNK. Действительно, точки M и N принадлежат грани ADC, точки M и K – грани ADB, точки N и K – грани DBC.

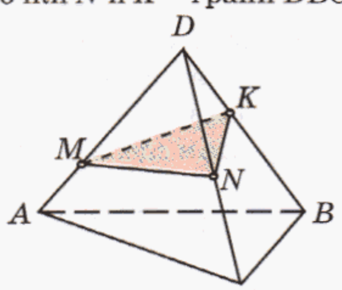


Рис. 53

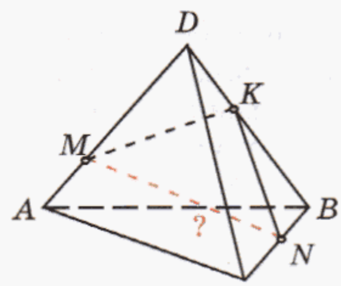


Рис. 54

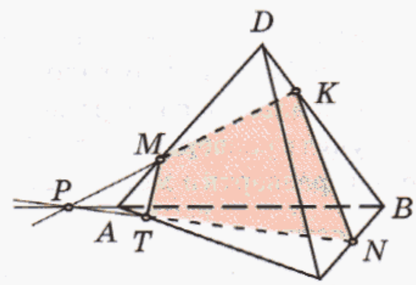


Рис. 55

А вот на рис. 54 точки M и N не принадлежат одновременно ни одной из граней тетраэдра, поэтому отрезок MN находится *внутри* него!

Построение сечения для этого случая показано на рис. 55: прямые MK и AB продолжены до их пересечения в точке P. Значит, прямая PN, а вместе с ней и ее точка T лежат в плоскости α, и теперь можно построить пересечение ее с каждой гранью тетраэдра. В результате получается четырехугольник $MKNT$. Многоугольник с бо́льшим числом сторон в качестве сечения получиться не может, так как граней у тетраэдра всего четыре.

Среди всех многогранников особую роль играет хорошо знакомый нам прямоугольный параллелепипед – форму прямоугольного параллелепипеда имеют многие предметы, с которыми мы постоянно встречаемся в нашей жизни: коробки, комнаты, шкафы и т.д.

Прямоугольный параллелепипед – это многогранник, все шесть граней которого являются прямоугольниками. У прямоугольного параллелепипеда 8 вершин и 12 ребер, но при этом ребер различной длины может быть только три. Поэтому говорят, что прямоугольный параллелепипед имеет три измерения – *длину*, *ширину* и *высоту* (рис. 56).

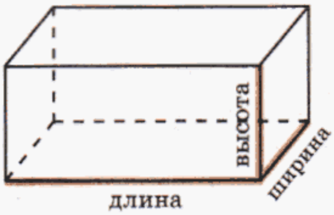


Рис. 56

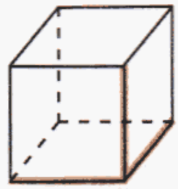


Рис. 57

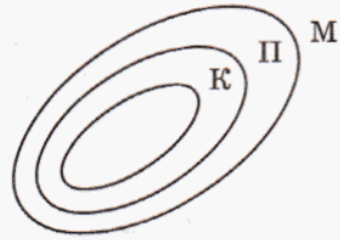


Рис. 58

Куб является частным случаем прямоугольного параллелепипеда, у которого все три его измерения равны (рис. 57). Взаимосвязь между множеством многогранников M, множеством прямоугольных параллелепипедов Π и множеством кубов K показана на диаграмме Эйлера–Венна (рис. 58).

Поскольку граней у прямоугольного параллелепипеда всего шесть, то многоугольник, который получается при пересечении его с плоскостью, не может иметь больше шести сторон. На рис. 59–61 показаны различные случаи сечения куба плоскостью α, проходящей через точки M, N и K. Построение этих сечений требует знания свойств взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве, которые будут изучаться в старших классах.

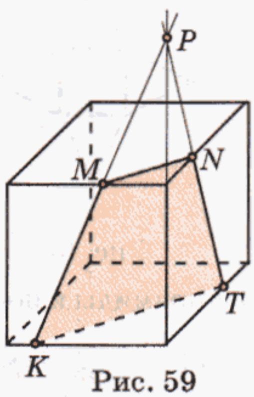


Рис. 59

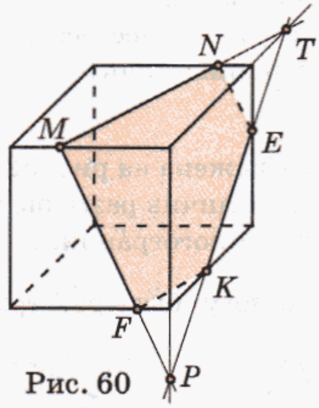


Рис. 60

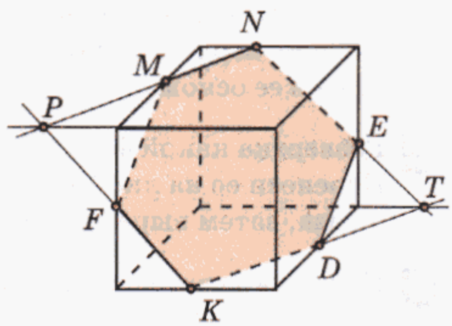


Рис. 61

К **477** а) Какие из геометрических тел – конус, прямоугольный параллелепипед, цилиндр, шар, пирамида, куб – являются многогранниками? Обоснуй свой ответ, пользуясь определением многогранника.

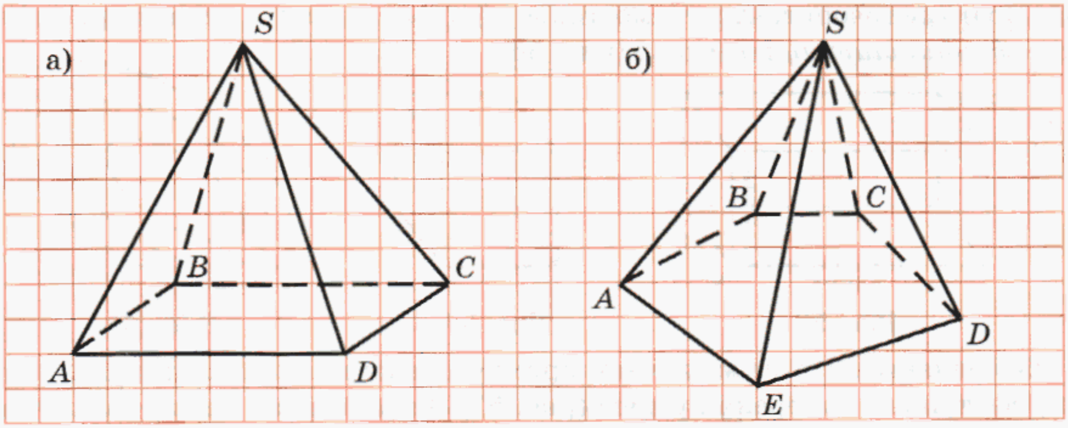
б) Найди примеры многогранников в предметах окружающего мира.

в) Сформулируй определение вершины, ребра, грани многогранника и покажи их на предметной модели.

478 а) Может ли у многогранника быть три вершины? Почему?

б) Какое наименьшее число вершин, ребер и граней может быть у многогранника?

479 Воспроизведи в тетради рисунок пирамиды. Сколько у нее вершин, ребер, граней, боковых граней? Какие из них являются невидимыми?



480 а) Сколько ребер семиугольной пирамиды выходит из вершины, не принадлежащей основанию? Сколько у нее всего ребер?
б) Существует ли пирамида, у которой 999 ребер?
в) У пирамиды 100 ребер. Какая это пирамида?
г) У пирамиды 725 вершин. Сколько вершин у основания этой пирамиды?

481 а) Сколько вершин у k-угольной пирамиды? Сколько у нее ребер? Сколько граней?
б) У пирамиды a граней. Сколько у нее ребер и сколько вершин? Сколько вершин у многоугольника в ее основании?

482 Развертка какой фигуры изображена на рис. 62? Перенеси ее на лист бумаги, увеличив размеры в 4 раза, затем вырежи и сверни многогранник.

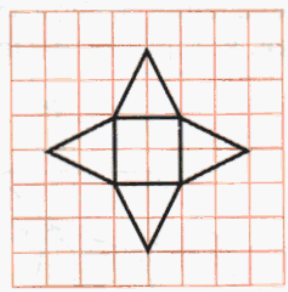


Рис. 62

483 Какие из заготовок на рис. 63 могут быть развертками пирамиды и почему?

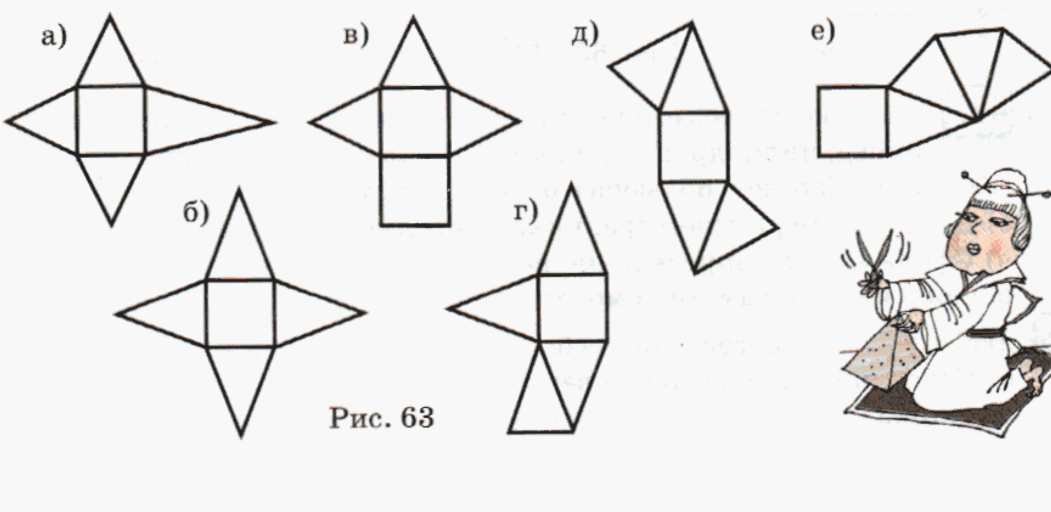
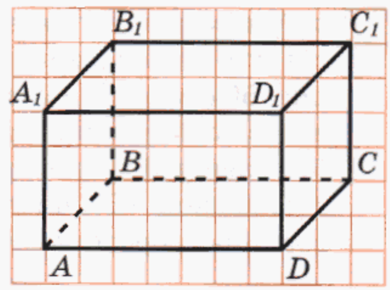


Рис. 63

484 а) Сколько ребер прямоугольного параллелепипеда выходит из каждой вершины? Сколько граней сходится к одной вершине?
б) Сколько у прямоугольного параллелепипеда всего: ребер, граней, вершин?
в) На спичечном коробке закрась одним цветом равные ребра. Сколько цветов для этого требуется? А сколько цветов понадобится, чтобы раскрасить равные грани?

485 а) Начерти прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Какие вершины, ребра, грани являются невидимыми? Проверь с помощью модели.
б) Сколько измерений имеет прямоугольный параллелепипед? Раскрась равные ребра одним цветом.
в) Выпиши пары равных граней. Сколько получилось пар?



486 На рис. 64 изображена развертка прямоугольного параллелепипеда. Перечерти ее на лист бумаги, увеличив размеры в 2 раза, вырежи и сверни многогранник.

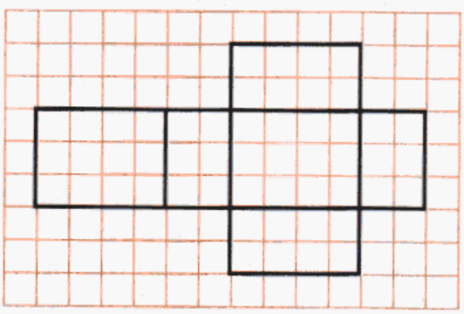


Рис. 64

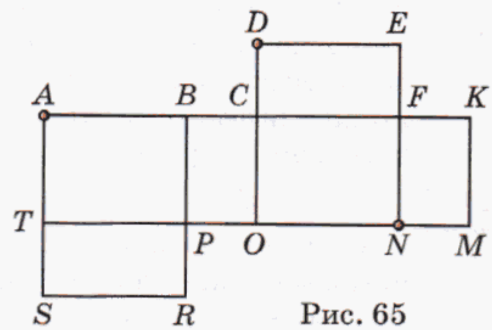


Рис. 65

487 Какие точки совместятся с точками A, D, N при склеивании развертки прямоугольного параллелепипеда на рис. 65?

488 а) Почему заготовка на рис. 66 не может быть разверткой прямоугольного параллелепипеда?

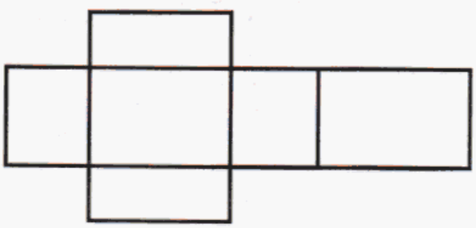


Рис. 66

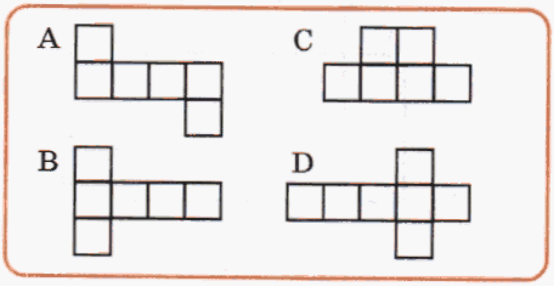
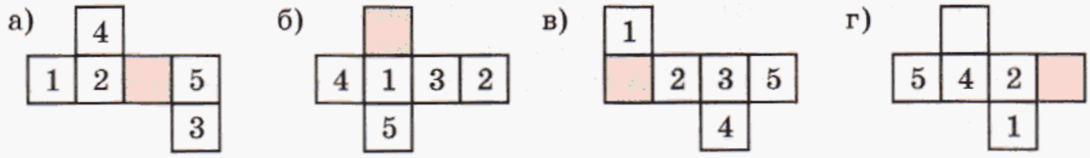


Рис. 67

б) Какие из заготовок на рис. 67 не могут быть развертками куба?

489 Мысленно сверни куб и определи, какая грань является верхней, если нижняя грань закрашена?



490 а) Многогранник называется выпуклым, если любые две его точки можно соединить содержащимся в нем отрезком. Какие из многогранников на рис. 50 (см. стр.111) являются выпуклыми, а какие – нет? Почему? Какие еще выпуклые многогранники ты знаешь?
б) Леонард Эйлер открыл удивительную формулу зависимости между числом вершин (B), числом ребер (P) и числом граней (Γ) выпуклого многогранника. Восстанови эту формулу по записи:

$$\square + \square - \square = 2.$$

491 а) Прямоугольный параллелепипед сложили из одинаковых кубиков (рис. 68). Сколько кубиков для этого понадобилось?
б) Запиши формулы объема и площади полной поверхности прямоугольного параллелепипеда с измерениями a, b и c.
в) Запиши формулы объема и площади полной поверхности куба с ребром a.

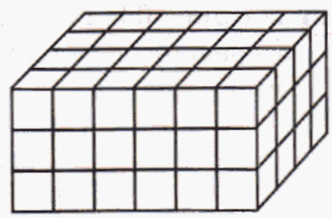
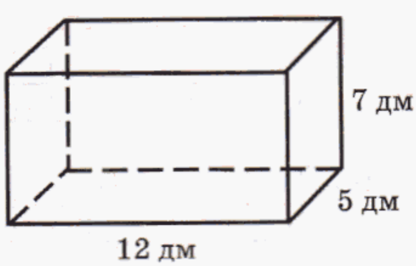
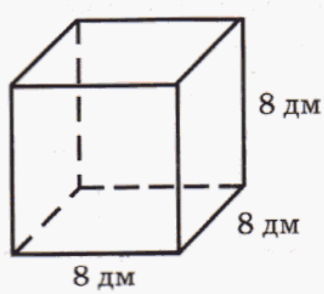


Рис. 68

492 а) Хватит ли проволоки длиной 1 м, чтобы сделать каркасную модель прямоугольного параллелепипеда с измерениями 7 см, 9 см и 14 см?
б) Прямоугольный лист бумаги имеет размеры 12 см и 8 см. Достаточно ли этого листа, чтобы оклеить всю поверхность прямоугольного параллелепипеда с измерениями 3 см, 4 см и 5 см?

493 Сравни сумму длин всех ребер (L), объем (V) и площадь (S) полной поверхности куба и прямоугольного параллелепипеда:





$L_1 =$ ________
$V_1 =$ ________
$S_1 =$ ________

$L_2 =$ ________
$V_2 =$ ________
$S_2 =$ ________

494 На ребрах куба (рис. 69) отметили две точки A и B. Через эти точки провели прямую, на которой отметили еще 6 точек. Какие из них являются точками пересечения прямой с ребрами куба или их продолжениями?

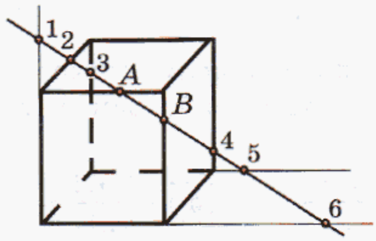


Рис. 69

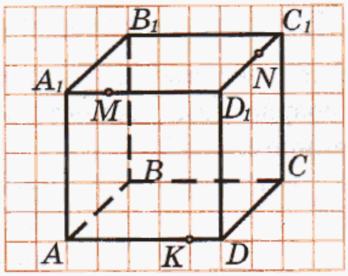


Рис. 70

495 а) На ребрах куба (рис. 70) отмечены точки M, N и K. Принадлежат ли граням куба отрезки MN, MK и KN?

б) Плоскость α проходит через точки M, N и K. Перенеси рисунок в тетрадь и построй сечение куба плоскостью α по следующему алгоритму.

1. Соединить точки M и N.
2. В плоскости грани AA_1D_1D провести прямую MK до ее пересечения с прямой DD_1 в точке P.
3. В плоскости грани DD_1C_1C построить точку пересечения прямых DC и PN. Обозначить ее T. Соединить точки K и T.
4. Четырехугольник $MNTK$ – искомый.

в) Проиллюстрируй построение сечения на каркасной модели куба.

П **496** Замени отношение дробных чисел несократимой дробью:

а) $0{,}2 : \frac{4}{9}$; б) $\frac{8}{15} : 6{,}4$; в) $3\frac{1}{7} : 0{,}55$; г) $5{,}6 : 8\frac{3}{4}$.

497 Реши задачи методом пропорций:

а) Два маляра покрасили за некоторое время 17 м². Сколько потребуется рабочих, чтобы с той же производительностью и за то же время покрасить 85 м²?

б) Бассейн при одновременном включении 4 кранов наполняется за 45 мин. За сколько минут бассейн можно заполнить при одновременном включении 6 таких кранов, если их производительность постоянна?

498 Реши уравнения:

а) $\dfrac{3x-2{,}4}{0{,}02} = \dfrac{8-x}{0{,}1}$; б) $\dfrac{3{,}6}{0{,}2(6y+1)} = \dfrac{9}{0{,}5y}$; в) $3\frac{1}{5} : \left(z - \frac{1}{2}\right) = 2\frac{2}{3} : \left(z + \frac{1}{3}\right)$.

499 а) Расстояние от Москвы до Нижнего Новгорода равно 440 км. Каким должен быть масштаб карты, чтобы это расстояние изображалось на карте отрезком длиной 17,6 см?

б) За какое время турист пройдет расстояние, которое изображается на карте отрезком длиной 3,6 см, если масштаб карты 1 : 10 000, а скорость туриста равна 5 км/ч?

Д **500** Склей из бумаги модель тетраэдра, гранями которого являются равносторонние треугольники со стороной 10 см.

501 Склей из бумаги прямоугольный параллелепипед с измерениями 9 см, 5 см и 3 см. Начерти три его проекции в масштабе 1 : 2.

502 Найди неизвестный член пропорции и расположи полученные числа в порядке возрастания, сопоставив их соответствующим буквам. Что означает полученное слово?

И $\frac{x}{3,6} = \frac{0,9}{-4}$ **С** $\frac{2,4}{-0,75} = \frac{-0,32}{x}$ **У** $\frac{-0,01}{4,2} = \frac{x}{-25,2}$

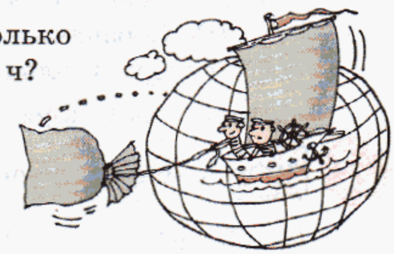
А $\frac{3}{4} : (-0,8) = 2,25 : x$ **Д** $0,125 : \frac{1}{3} = -\frac{3}{7} : x$ **Р** $-1,6 : x = 1\frac{1}{3} : 2,5$

503 Реши уравнения:

а) $\frac{2x - 5,6}{3} = \frac{1 - x}{1,5}$; б) $2\frac{1}{3} : y = 1\frac{2}{5} : (-1,1)$; в) $\frac{3z - 6}{7 - 2z} = \frac{1,2}{3,2}$.

504 а) Для кругосветного путешествия длительностью 144 дня был заготовлен запас продовольствия для 75 туристов. В плавание отправились 50 человек. На сколько дней хватит этого запаса продовольствия, если расход продовольствия на каждого туриста одинаков?

б) За четверть суток корабль прошел 189 км. Сколько километров он пройдет с той же скоростью за 14 ч?



505 Найди неизвестный член пропорции:

$$\frac{1,2 : 0,375 - 0,2}{6\frac{4}{25} : 15,4 + 0,8} = \frac{0,16 : 0,12 + 0,7}{x}.$$

506 Сравни суммы длин всех ребер, объемы и площади поверхности куба с ребром 7 м и прямоугольного параллелепипеда с измерениями 10 м, 5 м и 6 м.

С **507** Кубик склеен из маленьких деревянных кубиков. В нем просверлили 6 сквозных дырок, параллельных ребрам (рис. 71). Сколько маленьких кубиков остались неповрежденными?

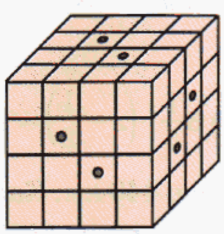


Рис. 71

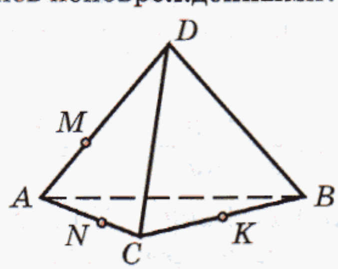


Рис. 72

508 На ребре AD тетраэдра $ABCD$ отметили точку M, на ребре AC – точку N, а на ребре BC – точку K (рис. 72). Построй сечение тетраэдра $ABCD$ плоскостью α, проходящей через точки M, N и K.

3. Тела вращения.

Со времен изобретения гончарного круга люди научились создавать круглые амфоры, вазы, горшки. Их можно получить в результате вращения в пространстве некоторой плоской фигуры вокруг прямой l, которая называется *осью вращения* (рис. 73). В геометрии такие фигуры называются **телами вращения.**

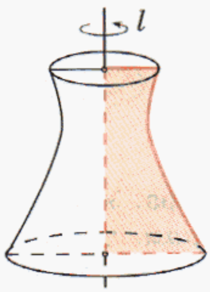


Рис. 73

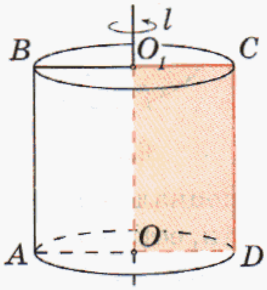


Рис. 74

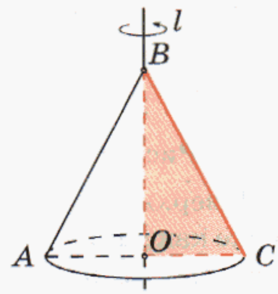


Рис. 75

Простейшими телами вращения являются **цилиндр** и **конус**. Цилиндр получается в результате вращения прямоугольника вокруг своей стороны (рис. 74), а конус – в результате вращения прямоугольного треугольника вокруг своего катета (рис. 75).

Само название этих тел напоминает нам о том, что геометрические фигуры являются образами предметов окружающего мира. Так, цилиндром (χυλινδυοζ) в Древней Греции называли валик для перемещения тяжелых грузов, конусом (χϖνοζ) называли еловую шишку и предметы, похожие на нее по форме, – пробку для бочки, верхушку шлема.

При сечении цилиндра, конуса или любого тела вращения плоскостью, содержащей ось вращения, получается *осевое сечение*. Осевым сечением цилиндра на рис. 74 является прямоугольник $ABCD$, а осевым сечением конуса на рис. 75 – равнобедренный треугольник ABC. Все осевые сечения одного тела вращения равны между собой.

Развертка цилиндра на плоскости состоит из двух кругов – *оснований* цилиндра, и прямоугольника – его *боковой поверхности*. В основании конуса также лежит круг, а боковая поверхность представляет собой сектор круга. Развертки цилиндра и конуса приведены на рис. 76 и 77.

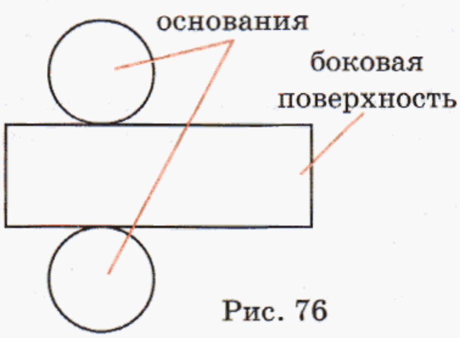


Рис. 76

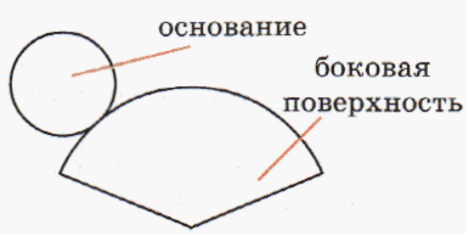
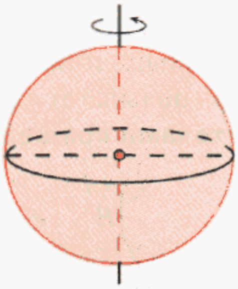


Рис. 77

Еще одной фигурой вращения является **шар**. Шар получается вращением круга вокруг своего диаметра (рис. 78).



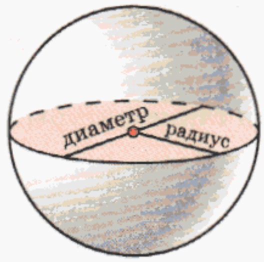


Рис. 78

Рис. 79

Поверхность шара имеет специальное название – **сфера**. У шара и сферы, так же как у круга и окружности, есть *центр*, *радиус* и *диаметр* (рис. 79). Особенностью сферической поверхности является то, что ее невозможно «развернуть» на плоскости.

Если какая-нибудь плоскость пересекает шар, то пересечением является либо точка, либо круг. Круг, проходящий через центр шара, называется *большим* кругом – его радиус равен радиусу шара. По мере удаления от центра размер круга сечения уменьшается (рис. 80). Это мы можем наблюдать, например, разрезая ножом апельсин.

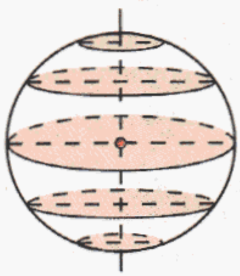


Рис. 80

Рис. 81

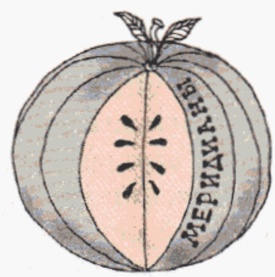


Рис. 82

Форму, близкую к форме шара, имеют арбуз, мяч, планеты, и в частности, Земля. Сечения поверхности Земли плоскостями, параллельными экватору, – это известные всем *параллели* (рис. 81). Когда параллели приближаются к полюсам, их радиусы уменьшаются, а самый большой радиус – у экватора Земли, он равен примерно 6378 км. А сечения поверхности Земли плоскостями, проходящими через Северный и Южный полюсы, – это *меридианы* (рис. 82).

509 а) Продемонстрируй, как с помощью 4–5 карандашей цилиндрической формы одного диаметра осуществить перемещение какого-нибудь предмета.

б) Сверни из бумаги коническую поверхность и продемонстрируй, как можно использовать ее в виде пробки.

510 Нарисуй от руки окружность и постарайся с помощью штриховки придать «объемность» получившемуся кругу.

511 **Практическая работа.**

Вырежи из картона прямоугольник, прямоугольный треугольник, круг и закрепи их на стержне (рис. 83). Вращая стержень между ладонями, понаблюдай, как образуются цилиндр, конус, шар.

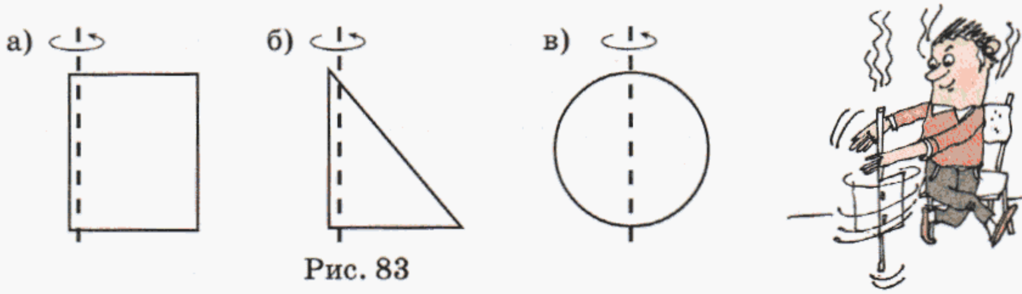


Рис. 83

512 Нарисуй в масштабе 1 : 4 тело вращения и три его проекции, если оно получается в результате вращения:

а) прямоугольника со сторонами 10 см и 4 см вокруг большей стороны;

б) прямоугольного треугольника с катетами 6 см и 8 см вокруг меньшего катета;

в) круга радиуса 6 см вокруг диаметра.

513 **Практическая работа.**

а) Развертка боковой поверхности цилиндра – прямоугольник, одна из сторон которого равна длине окружности основания. Проведи эксперимент, позволяющий выявить зависимость между длиной окружности C и ее диаметром d. Для этого вырежи полоску бумаги 5 см × 27 см и сверни ее в трубочку высотой 5 см. Начерти окружности с диаметрами $d_1 = 4$ см, $d_2 = 6$ см и $d_3 = 8$ см. Совмещай с ними поочередно круглое отверстие трубочки, отмечая положение конца полоски (рис. 84).

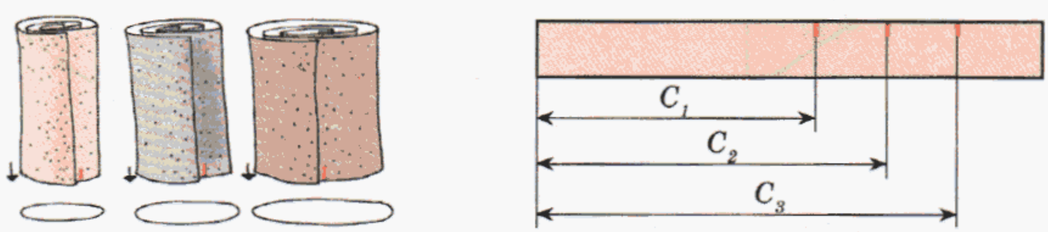


Рис. 84

Разверни полоску и измерь отрезки, показывающие длины окружностей C_1, C_2 и C_3. Найди отношение соответствующих значений C и d с точностью до сотых. Что ты замечаешь?

б) Вычисли с точностью до сотых среднее арифметическое полученных отношений и обозначь его π. Запиши формулу зависимости C от d.

в) Найди с точностью до сотых разность полученного тобой числа π и числа Архимеда – $\frac{22}{7}$.

514 а) Сколько больших окружностей можно провести на сфере через одну точку? Проиллюстрируй с помощью предметной модели шара.
б) Можно ли провести на шаре две большие окружности так, чтобы они не пересекались? А две произвольные окружности?
в) На сколько частей делится сфера одной большой окружностью, 2 большими окружностями, 3 большими окружностями, имеющими общий диаметр?

515 На сфере проведены две большие окружности (рис. 85). По рисунку можно предположить, что они пересеклись в четырех точках. А сколько на самом деле точек пересечения?

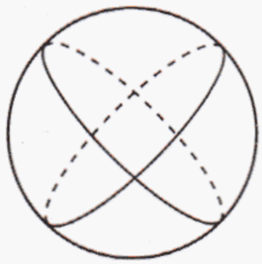


Рис. 85

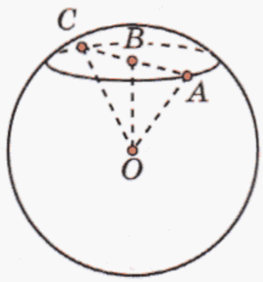
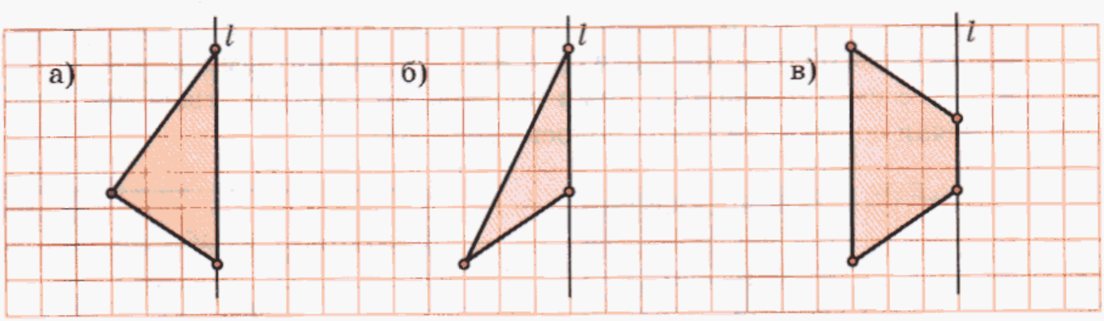


Рис. 86

516 Отрезок OA на рис. 86 равен 5 см. Что можно сказать о длинах отрезков OB и OC на этом рисунке?

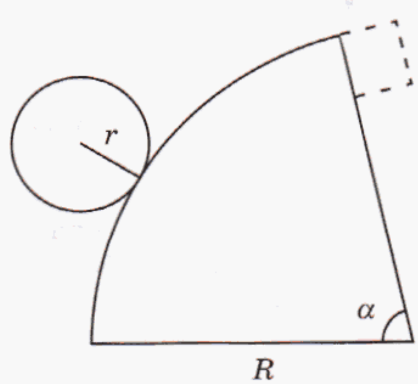
517 Нарисуй в масштабе 2 : 1 геометрические тела, которые получаются при вращении вокруг прямой l данных фигур. Опиши их.



518 Пусть радиус основания конуса равен r, а его боковую поверхность можно «развернуть» в сектор круга радиуса R. Величина угла α этого сектора в градусах вычисляется по формуле:

$$\alpha = \frac{360^\circ \cdot r}{R}.$$

Вычисли угол α и построй развертку конуса для значений $r = 2$ см и $R = 5$ см. Вырежи боковую поверхность из бумаги и, свернув ее в конус, убедись в том, что длина дуги сектора равна длине окружности основания.



519 а) Масштаб карты равен 1 : 100 000. Каким отрезком на карте изображается расстояние на местности, равное 50 км?

б) Запиши масштаб карты, если отрезок в 3 км на местности изображается отрезком на карте в 2,4 см.

в) Рисунок сделан в масштабе 10 : 1. Как изменены на нем реальные размеры предметов?

г) Запиши масштаб рисунка, если фигура на рисунке увеличена в 5 раз.

520 **Счет-тест** (5 мин).

Вариант I		Вариант II	
1) $\frac{3}{5}+\frac{5}{6}+\frac{1}{2}$	5) $-0{,}5-0{,}06$	1) $\frac{9}{14}+\frac{8}{21}+\frac{1}{7}$	5) $-2{,}8-0{,}7$
2) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$	6) $17{,}2\cdot 0{,}01$	2) $18\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)$	6) $15{,}6:0{,}01$
3) $1\frac{1}{8}:\frac{3}{4}$	7) $-3{,}2:(-0{,}08)$	3) $1\frac{1}{5}:\frac{3}{10}$	7) $3{,}5\cdot(-0{,}04)$
4) $-3\frac{1}{6}-\left(-1\frac{1}{2}\right)$	8) $(1-0{,}2)\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)$	4) $-1\frac{3}{4}-\left(-2\frac{1}{3}\right)$	8) $\frac{3}{5}:(-1-0{,}2)$

521 а) Разбей число 425 на два слагаемых пропорционально числам 2 и 3.

б) Раздели число 520 на три части в отношении $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$.

522 Акциями предприятия владеют фирмы A, B и C. Количество их акций находится в отношении 3 : 5 : 7 и составляет 60% от числа всех акций предприятия. Остальными 200 000 акций владеют работники предприятия. Сколько акций имеет каждая фирма?

523 Три каменщика за выполненное вместе задание получили 4700 р. Первый каменщик может выполнить все задание за 3 дня, второй – за 4, а третий – за 5. Как распределить между ними выплаченную сумму пропорционально их производительности?

524 При строительстве дома по известным размерам стен можно вычислить, сколько кирпичей потребуется для ее укладки. Для этого используется формула

$$N = 61lh,$$

где N – количество кирпичей, l м – длина стены и h м – высота стены.

а) Найди N, если $l = 8$, $h = 3{,}5$.

б) Найди l, если $N = 2440$, $h = 2{,}5$.

в) Найди h, если $N = 5000$, $l = 4$. (Ответ округли с точностью до десятых.)

В каждом случае придумай соответствующую задачу.

525 В физике при расчете сопротивления R проводника используется формула:

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

где l – длина проводника, S – площадь его поперечного сечения и ρ – удельное сопротивление. Вырази из этой формулы значения ρ, l и S.

526 Количество теплоты Q, необходимое для нагревания физического тела, можно вычислить по формуле:

$$Q = cm(t_2 - t_1),$$

где c – удельная теплоемкость вещества, m – масса тела, t_1 – начальная и t_2 – конечная температуры тела. Вырази из этой формулы значения c, m, t_1 и t_2.

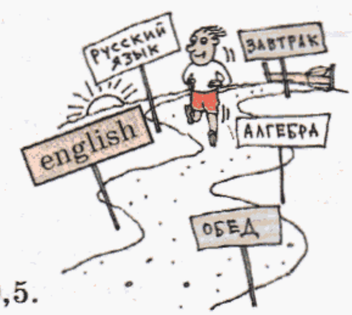
527 Выполни действия и упрости, если возможно, полученные выражения (значения всех переменных отличны от нуля):

а) $\frac{m}{15} - \frac{m}{25}$; б) $\frac{8}{3a} + \frac{2}{a^2}$; в) $-\frac{7x}{12y^2} \cdot \frac{6y^3}{x}$; г) $\frac{ab}{9c^2} : \frac{-5a^2}{18c}$.

Д **528** Склей из бумаги модель цилиндра, радиус основания которого равен 3,5 см, а развертка боковой поверхности – прямоугольник со сторонами 7π см и 10 см, где π – число, равное примерно 3,14.

529 Нарисуй в масштабе 1 : 3 геометрическое тело, которое получается при вращении квадрата вокруг своей диагонали, если длина диагонали равна 12 см. Начерти три проекции этого тела.

530 Упрости выражения и найди их значения:



а) $\frac{3}{a} + \frac{7}{2a}$, если $a = -\frac{1}{2}$;

б) $\frac{2}{5c} - \frac{1}{4c} + \frac{4}{15c}$, если $c = -\frac{5}{6}$;

в) $\frac{3mn}{2xy} : \frac{6m^2}{xy}$, если $m = \frac{1}{6}$; $n = -\frac{2}{3}$; $x = 0{,}8$; $y = -0{,}5$.

531 На выполнение домашних заданий у Димы ушло 2 ч. Это время он распределил между математикой, русским языком, английским языком и биологией в отношении 2 : 2 : 3 : 1. Сколько времени ушло на каждый из предметов?

532 Скорость v, с которой тело движется по окружности, можно вычислить по формуле:

$$v = \frac{2\pi r}{T},$$

где r – радиус окружности, T – время, за которое оно совершает один полный оборот (период обращения), π – число, равное примерно 3,14. Вырази из этой формулы значения r и T.

533 Раздели число 64 в отношении $a : b$, если:

$a = \left(2\frac{8}{15} - 1\frac{5}{18} - 3\frac{1}{5}\right) \cdot (-3,6);$ $\qquad b = \dfrac{0,2 \cdot 0,8 - 0,2 \cdot 1,8}{(-0,2)^3}$.

С **534** Сделай модель конуса, радиус основания которого равен 5 см, а радиус развертки боковой поверхности – 15 см.

535 Из 6 одинаковых квадратов легко составляется развертка куба. Можно ли из 5 одинаковых прямоугольников составить развертку параллелепипеда?

§ 3. Геометрические величины и их измерение

1. Измерение величин. Длина, площадь, объем.

Понятие величины связано с количественной характеристикой какого-либо объекта или явления. Величина может быть измерена, а результат измерения выражается числом. Примерами величин являются время, скорость, масса, температура и т.д. Нам известны также *геометрические величины* **длина, площадь, объем,** характеризующие свойства геометрических фигур.

Чтобы измерить величину, нужно выбрать *единицу измерения* и узнать, сколько раз она содержится в измеряемой величине. От выбора единицы измерения зависит результат измерения величины: чем она больше, тем меньше значение измеряемой величины, и наоборот. Поэтому сравнивать величины и выполнять над ними арифметические действия можно только тогда, когда они измерены одной единицей измерения.

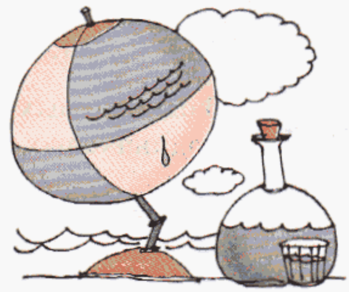
Первые единицы измерения были не слишком точны. Длины измерялись шагами, ступнями, локтями, ладонями и т.д. Единицами измерения площадей служили либо участки земли, которые можно было вспахать за день, либо длины обхода этих участков – ошибочно предполагалось, что фигуры, равные по площади, имеют и равные периметры. Объемы измерялись специальными мерными сосудами, которые в разных местностях были разными.

Это привело к тому, что в Германии, например, было 40 различных единиц длины – *локтей*, во Франции – 18 единиц длины, называвшихся *лье*, а в России – более 100 различных *футов*: ткацкий, рабочий, землемерный, инженерный и т.д. Разумеется, такой разнобой мешал развитию торговли и промышленности; потребности практики диктовали поиски единой системы мер.

Ученые выдвигали разные идеи, стремясь зафиксировать общие, единые для всех меры. Предлагалось взять за основу размеры зерен, пчелиных сот, длину маятника, делающего одно качание в секунду... Но необходимой точности добиться не удавалось.

Лишь в середине XIX века была создана ***метрическая система*** мер – международные эталоны единиц измерения, которыми многие страны пользуются до сих пор.

Основной единицей длины в этой системе является **метр** – $\frac{1}{40\,000\,000}$ часть Парижского меридиана, а единицы площади и объема согласованы с нею: за единицу площади принят *квадратный метр*, за единицу объема – *кубический метр*. При этом было решено, что отношение соседних единиц измерения должно равняться 10 или быть кратно 10.



Названия мер, бо́льших основной единицы, образуются с помощью приставок ***дека*** (десять), ***гекто*** (сто), ***кило*** (тысяча) и ***мириа*** (десять тысяч); а для мер, меньших основной, используются приставки ***деци*** (десятая), ***санти*** (сотая), ***милли*** (тысячная) и ***нано*** (миллиардная). Наиболее распространенными единицами длины, площади и объема в повседневной жизни являются:

$$1\text{ км}\underbrace{\quad\quad}_{1000}1\text{ м}\underbrace{\quad\quad}_{10}1\text{ дм}\underbrace{\quad\quad}_{10}1\text{ см}\underbrace{\quad\quad}_{10}1\text{ мм}$$

$$1\text{ м}^3\underbrace{\quad\quad}_{1000}1\text{ дм}^3\underbrace{\quad\quad}_{1000}1\text{ см}^3\underbrace{\quad\quad}_{1000}1\text{ мм}^3$$

$$1\text{ км}^2\underbrace{\quad\quad}_{100}1\text{ га}\underbrace{\quad\quad}_{100}1\text{ а}\underbrace{\quad\quad}_{100}1\text{ м}^2\underbrace{\quad\quad}_{100}1\text{ дм}^2\underbrace{\quad\quad}_{100}1\text{ см}^2\underbrace{\quad\quad}_{100}1\text{ мм}^2$$

Заметим, что единица объема, равная 1 дм^3, имеет и другое название – ***литр***. В литрах обычно измеряют объемы жидких веществ.

Формулы зависимостей между линейными размерами геометрических фигур, их площадями и объемами позволили перейти от непосредственных измерений площадей и объемов к вычислениям по этим формулам. Некоторые из них нам уже известны – например, формулы периметра и площади прямоугольника и квадрата, формулы площади поверхности и объема прямоугольного параллелепипеда и куба (рис. 87).

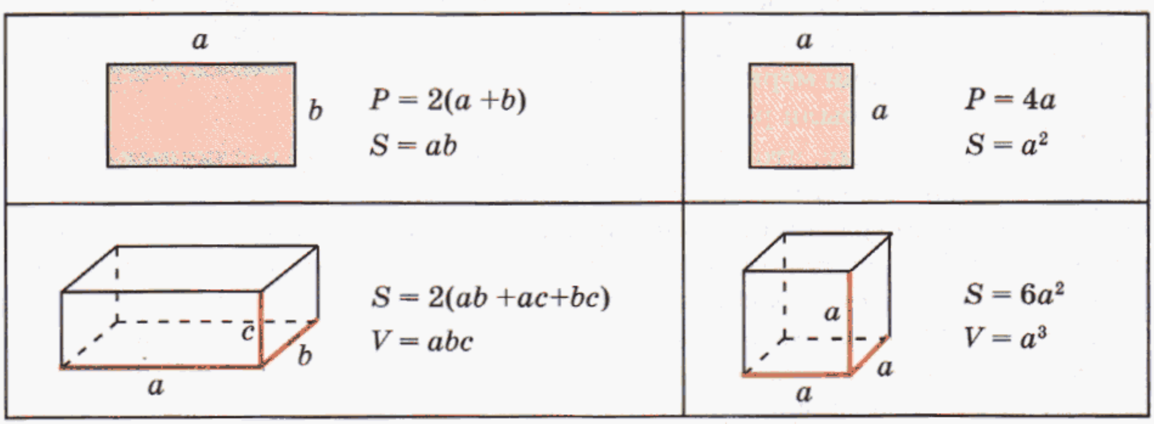


Рис. 87

В настоящее время известны и многие другие взаимосвязи между длинами, площадями и объемами фигур на плоскости и в пространстве. Например, длина окружности C пропорциональна ее радиусу ($C = 2\pi r$), площадь круга S – квадрату радиуса ($S = \pi r^2$), площадь сферы S также пропорциональна квадрату радиуса ($S = 4\pi r^2$), а объем шара V – кубу радиуса ($V = \frac{4}{3}\pi r^3$) (рис. 88).

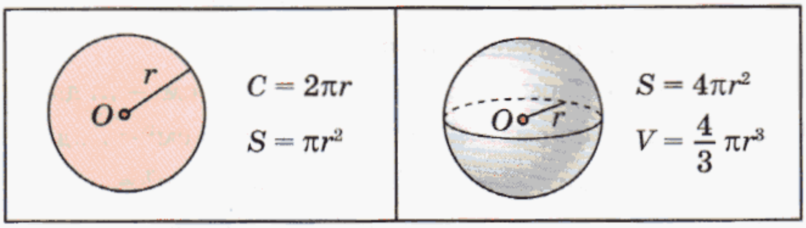


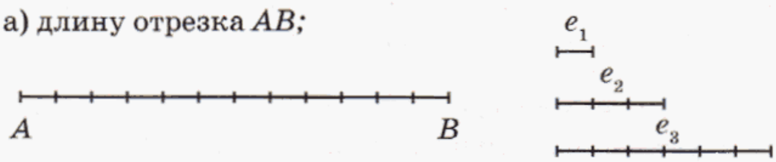
Рис. 88

Греческая буква π («пи») в приведенных формулах обозначает число, равное отношению длины любой окружности к своему диаметру (№ 513, стр. 121). Число π не является рациональным. Его приближенное значение с точностью до десятитысячных равно 3,1416.

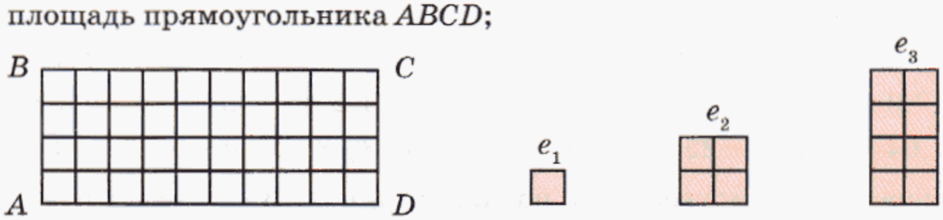
В старших классах будет рассказано, как устанавливались эти и многие другие формулы зависимостей между геометрическими величинами.

К **536** Вырази в единицах измерения e_1, e_2, e_3:

а) длину отрезка AB;



б) площадь прямоугольника $ABCD$;



в) объем прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Как изменяется результат измерения величин при увеличении мерки, при уменьшении мерки?

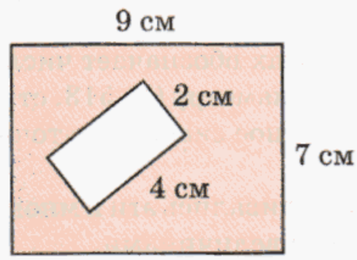
537 В каких единицах обычно измеряют: а) длину шага; б) вместимость банки; в) площадь поля; г) объем бассейна; д) площадь квартиры; е) расстояние между городами; ж) рост человека?

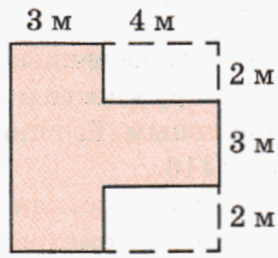
538 Вырази: а) 1 дм в миллиметрах, в километрах, в метрах; б) 1 а в гектарах, в квадратных метрах, в квадратных километрах; в) 1 см^3 в кубических миллиметрах, в кубических метрах, в кубических дециметрах, в литрах.

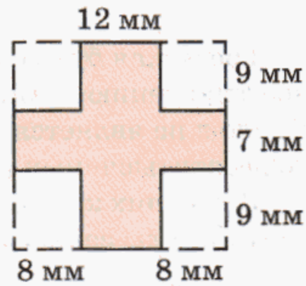
539 Заполни пропуски и прочитай полученные числа:

а) 2 м 45 см = ... см	б) 2 м 45 см = ... м	в) 2 м 45 см = ... дм
2 м^2 45 см^2 = ... см^2	2 м^2 45 см^2 = ... м^2	2 м^2 45 см^2 = ... дм^2
2 м^3 45 см^3 = ... см^3	2 м^3 45 см^3 = ... м^3	2 м^3 45 см^3 = ... дм^3

540 Вычисли разными способами площади закрашенных фигур:

а)


б)


в)


541 а) Длина прямоугольника на 16 см больше ширины, а периметр равен 22,4 дм. На сколько квадратных дециметров площадь этого прямоугольника меньше площади квадрата с тем же периметром?

б) Периметр квадрата равен 6 м, а периметр прямоугольника на 20% больше. Ширина прямоугольника в 5 раз меньше длины. На сколько процентов площадь этого прямоугольника меньше площади квадрата?

542 Выполни действия:

а) 4,1 м – 3,7 дм + 72,6 см;	г) 3 дм^2 2 см^2 + 35,4 см^2 : 0,05;
б) 10,2 дм + 8,4 см – 0,125 м;	д) 1,5 м^3 – 1,5 дм^3 + 51 500 см^3;
в) 1,64 км · 30,5 – 25 км 20 м;	е) 28,8 а : 0,48 + 5,6 га · 0,25.

543 Измерения прямоугольного параллелепипеда 36 см, 8 дм и 12 дм 5 см. Найди его объем и вырази: а) в кубических дециметрах; б) в кубических метрах; в) в кубических сантиметрах.

544 Сравни объемы и площади поверхностей куба и прямоугольного параллелепипеда, если: а) ребро куба равно 5 дм, а измерения прямоугольного параллелепипеда 15 см, 1 м и 8 дм; б) ребро куба равно 4 см, а измерения прямоугольного параллелепипеда 0,2 дм, 3 см и 25 мм. Что ты замечаешь?

545 Объем прямоугольного параллелепипеда равен 240 см^3, ширина – 5 см, а высота – на 20% больше ширины. Длину этого параллелепипеда уменьшили на 3 см. На сколько процентов уменьшился его объем?

546 Найди объем тела, изображенного на рис. 89, и построй три его проекции в масштабе 1 : 10.

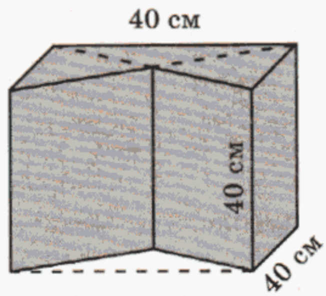


Рис. 89

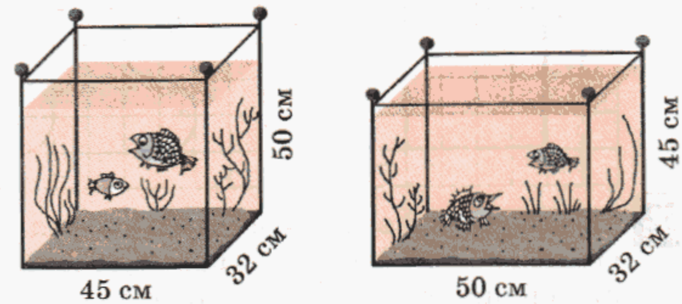


Рис. 90

547 а) На изготовление какого из двух аквариумов на рис. 90 потребовалось больше стекла?

б) Аквариумы заполнили водой так, что уровень воды в первом аквариуме ниже верхнего края на 10 см, а во втором – на 5 см. В каком аквариуме больше воды?

548 Сравни:

а) 40 $см^2$ и 4 $дм^2$;
500 $мм^2$ и 5 $см^2$;
8000 $дм^2$ и 8 $м^2$;
10 000 $м^2$ и 1 га;

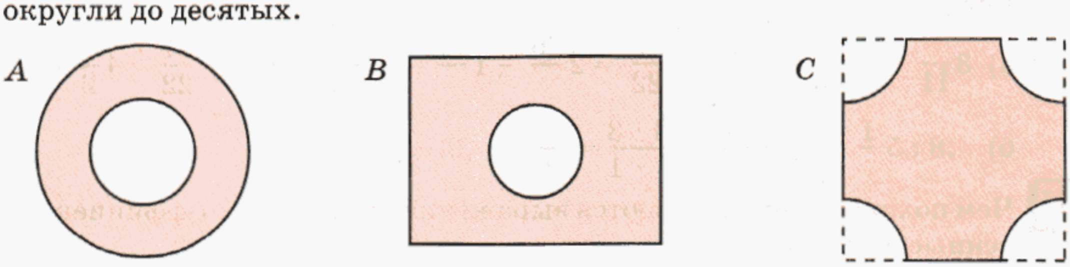
б) 9000 $дм^3$ и 9 $м^3$;
700 $см^3$ и 7 $дм^3$;
20 000 $мм^3$ и 2 $см^3$;
600 000 $см^3$ и 6 $м^3$.

549 Из текста учебника выпиши формулы, выражающие зависимости между величинами в круге и в шаре. Пользуясь ими, реши задачи:

1) Радиус окружности равен 5 см. Чему равна длина этой окружности? Число π округли до сотых.

2) Сколько оборотов сделает колесо на участке пути в 1,2 км, если диаметр колеса равен 0,8 м? Число π округли до целых.

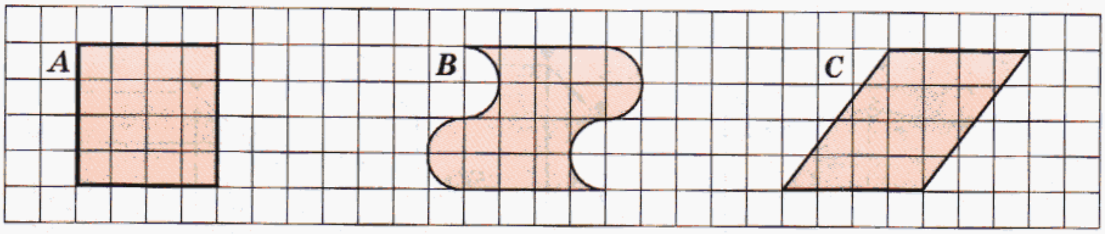
3) Выполни измерения и найди площади заштрихованных фигур. Число π округли до десятых.



4) Радиус мяча равен 1,5 дм. Найди его объем и площадь поверхности. Число π округли до сотых, а полученные ответы – до десятых.

550 Во сколько раз площадь поверхности шара радиуса r больше площади круга того же радиуса?

551 Докажи, что фигуры A, B и C *равновелики* (имеют равные площади):



552 а) Перечерти и вырежи из бумаги параллелограмм (рис. 91). Покажи, как его можно «перекроить» в прямоугольник.

б) Запиши формулу для вычисления площади параллелограмма по длине его стороны a и длине перпендикуляра h, опущенного из вершины параллелограмма на эту сторону (рис. 92).

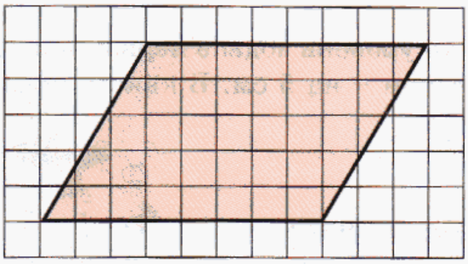


Рис. 91

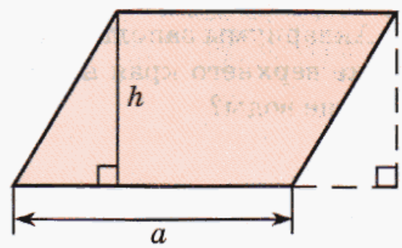


Рис. 92

553 Назови *тему* и *рему* общих высказываний и переформулируй их, используя союз «если..., то...»:

а) Куб является прямоугольным параллелепипедом.

б) Диаметр окружности является хордой этой окружности.

Построй обратные утверждения разными способами: меняя местами *тему* и *рему* и меняя местами условие и заключение. Докажи, что обратные утверждения являются ложными, и построй их отрицания.

554 Перепиши в тетрадь равенства, вставляя вместо звездочек пропущенные цифры:

а) $3\frac{*}{11} - *\frac{15}{22} = *\frac{13}{11} - 1\frac{*}{22} = 2\frac{26}{*} - 1\frac{15}{*} = 1\frac{26-15}{22} = *\frac{11}{22} = 1\frac{*}{2} = 1,*$;

б) $*,8 : 5\frac{1}{*} = \frac{48 \cdot 3}{10 \cdot *} = \frac{3 \cdot 3}{* \cdot 1} = \frac{*}{10} = *,9$.

555 Чем похожи и чем отличаются выражения? Найди их коэффициенты и буквенные части:

а) $(-3x)^2$, $-3x^2$ и $(-3)^2x$; б) $\left(-\frac{1}{2}y\right)^3$, $-\frac{1}{2}y^3$ и $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 y$.

556 Выполни действия:

а) $-2^2 : (-0{,}25)$; б) $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 1{,}8$; в) $(-0{,}5)^3 \cdot 4{,}8$; г) $-1\frac{7}{9} : \left(-\frac{2}{3}\right)^3$.

557 а) Какое число нужно вычесть из числителя и знаменателя дроби $\frac{22}{37}$, чтобы получить число, равное 0,5?
б) Некоторое число вычли из числителя, прибавили к знаменателю дроби $\frac{7}{9}$ и после сокращения получили $\frac{1}{3}$. Какое это число?

558 Упрости выражения и найди их значения:

а) $5(a-1)-(2a+3)$, если $a=-\frac{2}{3}$;

б) $-2(1-3b)+4(2-b)$, если $b=-0{,}2$;

в) $4\frac{1}{7}-\left(x+1\frac{9}{14}\right)+2x$, если $x=-1{,}5$;

г) $1\frac{1}{3}+2y-\left(2\frac{3}{4}-y\right)$, если $y=-\frac{1}{9}$.

Д **559** В произведениях Ж.Верна встречаются такие строки:
а) «Аэростат несся вперед со скоростью 45 *миль в час*...»
б) «Туземцы были ростом от 5 *футов* 4 *дюймов* до 5 *футов* 7 *дюймов*».
в) «Аппарат, напоминавший огромного кита, был длиной приблизительно в 250 *футов* и возвышался на 10 – 12 *футов* над уровнем моря...»
г) «Было решено ограничить дневные переходы 15 – 18 *милями*».
Переведи выделенные величины в метрическую систему, если:
1 *миля* = 4448 м; 1 *фут* = 32,5 см; 1 *дюйм* = 2 см 7 мм.

560 Заполни пропуски и прочитай полученные равенства:

а) 3 м 8 см = ... см;	б) 3 дм 8 см = ... дм;	в) 3 км 8 м = ... км;
3 м^2 8 см^2 = ... см^2;	3 дм^2 8 см^2 = ... дм^2;	3 км^2 8 м^2 = ... км^2;
3 м^3 8 см^3 = ... см^3;	3 дм^3 8 см^3 = ... дм^3;	3 км^3 8 м^3 = ... км^3.

561 Выполни действия:

а) 7 м 25 мм – 72,5 см;

б) 9 км 48 м + 3,52 км – 556 м;

в) 8 см^2 5 мм^2 · 24 + 680 мм^2;

г) 0,02 дм^3 – 2,7 см^3 : 0,25.

562 Поле имеет форму прямоугольника. При проведении землеустройства длину поля увеличили на 5%, а ширину – на треть. На сколько процентов увеличилась площадь поля?

563 Измерения одного прямоугольного параллелепипеда равны 0,4 м, 25 см и 1,5 дм, а измерения другого параллелепипеда – 0,3 м, 2 дм и 26 см. Какой из этих параллелепипедов имеет бо́льший объем? Какой имеет бо́льшую площадь поверхности?

564 Докажи, что $|x|<0{,}1$, если:
$x=-10{,}045:4{,}9+5{,}1:\left(\left(9\frac{11}{14}-12\frac{1}{7}\right):\left(-3\frac{1}{7}\right)-7{,}5\cdot\left(-\frac{6}{25}\right)\right)$.

565 Перепиши в тетрадь равенства, вставляя вместо звездочек пропущенные цифры:

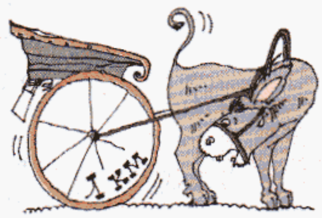
а) $*\frac{5}{6}+1\frac{*}{15}=2\frac{25}{*}+*\frac{8}{30}=3\frac{*+8}{30}=3\frac{*}{30}=4\frac{3}{*}=4\frac{*}{10}=*,1;$

б) $\frac{4}{25}:\frac{1}{15}=\frac{*\cdot 15}{25\cdot *}=\frac{4\cdot *}{*\cdot 1}=\frac{12}{5}=2\frac{*}{5}=2,*.$

566 а) Чему равна площадь циферблата часов, если его радиус составляет 4,5 см? Ответ округли до целых ($\pi \approx 3,14$).

б) Колесо на расстоянии 1 км сделало 400 оборотов. Найди диаметр колеса с точностью до сотых ($\pi \approx 3,142$).

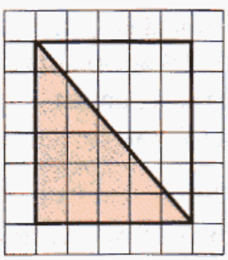
567 Реши уравнения:

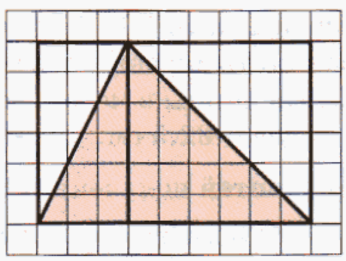


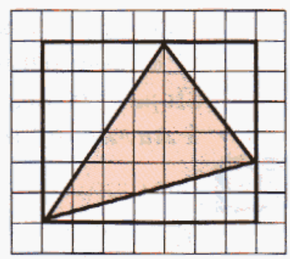
а) $2\frac{5}{8}-\left(4\frac{3}{16}-y\right)=-1\frac{1}{4};$　　в) $\frac{2-x}{3}-\frac{6-x}{2}=0;$

б) $1\frac{7}{20}-\left(x+1\frac{7}{12}\right)=2\frac{4}{15};$　　г) $3-\frac{x-3}{5}=\frac{x}{4}.$

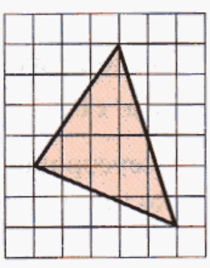
С **568** Найди площади закрашенных треугольников:

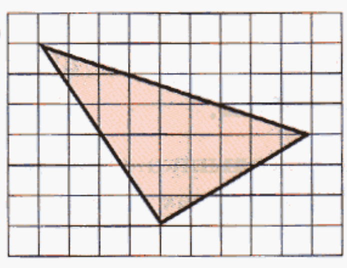
а) 

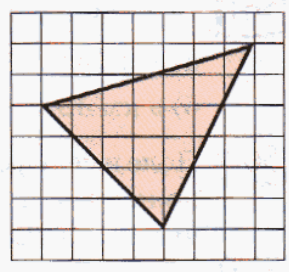
б) 

в) 

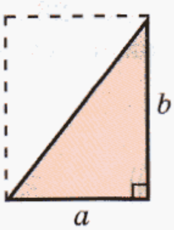
569 Перерисуй треугольники в тетрадь. Вычисли их площади, достраивая до прямоугольников:

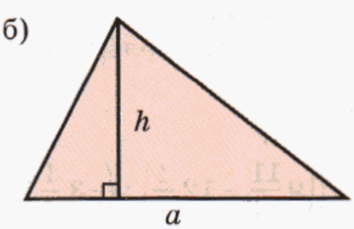
а) 

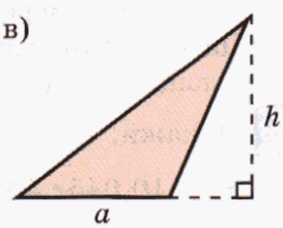
б) 

в) 

570 Запиши формулы для вычисления площадей треугольников:

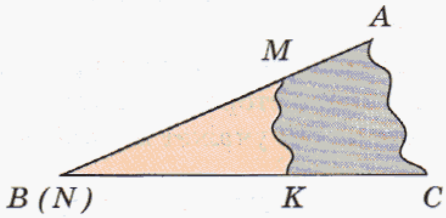
а) 

б) 

в) 

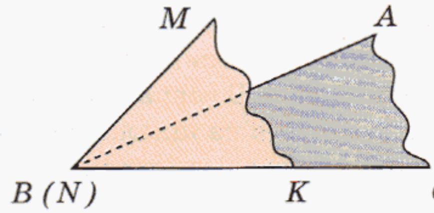
2. Измерение углов. Транспортир.

Еще одна геометрическая величина – **мера угла**. Два угла можно сравнить непосредственно с помощью наложения. Для этого один угол надо наложить на другой так, чтобы *одна сторона у них совпала*. Если при этом и две другие стороны совпадут, то углы равны (рис. 93). Если же вторые стороны не совпадут, то меньше тот угол, сторона которого оказалась внутри другого угла (рис. 94).



$\angle ABC = \angle MNK$

Рис. 93



$\angle ABC < \angle MNK, \quad \angle MNK > \angle ABC$

Рис. 94

При измерении углов, как и при измерении любых величин, выбирают единицу измерения и устанавливают, сколько раз она содержится в данном угле. Так, на рис. 95 угол AOB измерен различными единичными углами e_1, e_2 и e_3. По рисунку видно, что чем больше единичный угол, тем меньше величина угла, и наоборот.

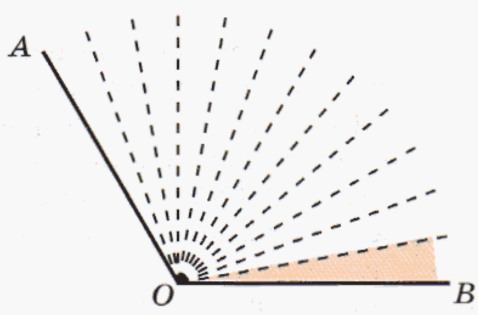
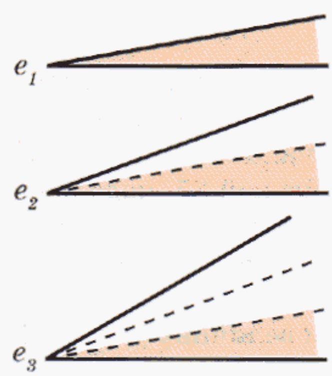


Рис. 95

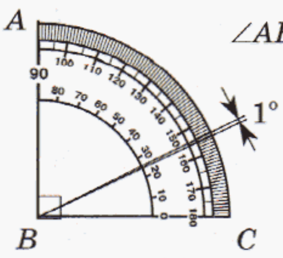


$\angle AOB = 12e_1$

$\angle AOB = 6e_2$

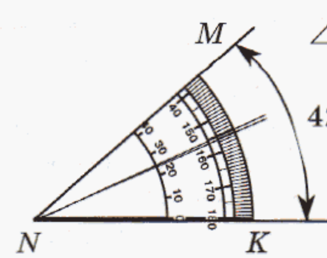
$\angle AOB = 4e_3$

Самой распространенной единицей измерения углов является **градус** (обозначается 1°). Угол величиной в 1° равен $\frac{1}{90}$ части прямого угла (рис. 96). Например, величина угла MNK, выраженная в градусах, равна 42° (рис. 97).



$\angle ABC = 90^\circ$

Рис. 96



$\angle MNK = 42^\circ$

Рис. 97

Градусная мера угла появилась в древнем Вавилоне более 3000 лет назад и связана с шестидесятиричной системой счисления, которая тогда там использовалась. При разработке метрической системы мер в конце XVIII – начале XIX в. было предложено делить прямой угол не на 90, а на 100 частей. Угол, равный $\frac{1}{100}$ части прямого угла, назвали ***град***, однако используется он редко.

На шкале известного нам прибора – **транспортира** – отложены углы в 1°, поэтому с его помощью можно измерять или строить на плоскости любой угол, выраженный в градусах. Вспомним, как это делают.

Чтобы *измерить* угол, например, AOB, надо приложить транспортир так, чтобы вершина угла O совпала с центром транспортира, а сторона OA прошла через начало отсчета на шкале (рис. 98). Тогда сторона OB укажет *на той же шкале* величину угла в градусах: $\angle AOB = 124°$.

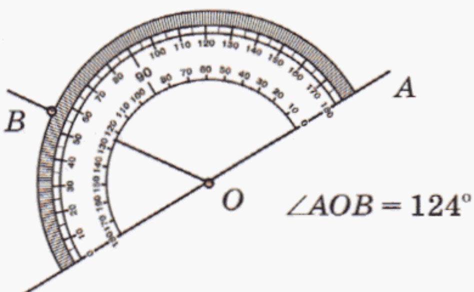


Рис. 98

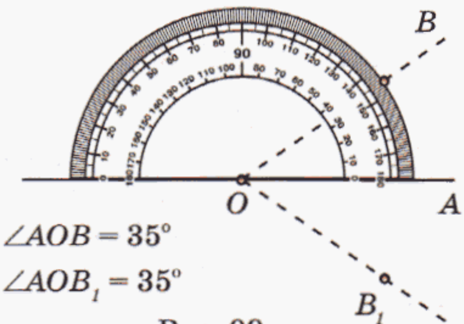
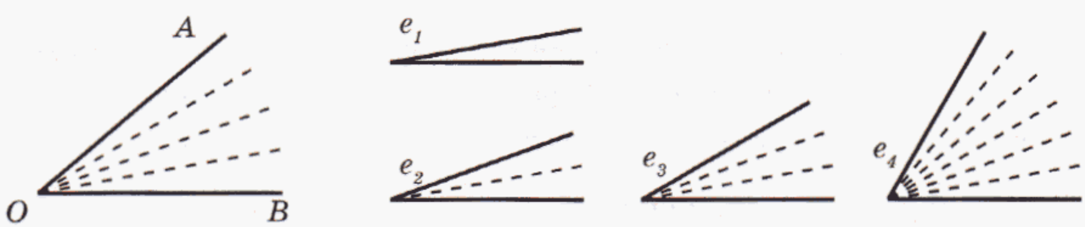


Рис. 99

Чтобы *построить* угол, равный, например, 35°, надо совместить центр транспортира с началом некоторого луча OA – точкой O – так, чтобы луч OA прошел через начало отсчета на шкале (рис. 99). Затем около деления выбранной шкалы с отметкой 35° надо поставить точку B и соединить ее с точкой O. Градусная мера полученного угла AOB равна 35°: $\angle AOB = 35°$. Отметим, что такой же угол можно построить и по другую сторону от луча OA: $\angle AOB_1 = 35°$.

К **571** Вырази величину угла AOB в *единицах* измерения e_1, e_2, e_3, e_4:



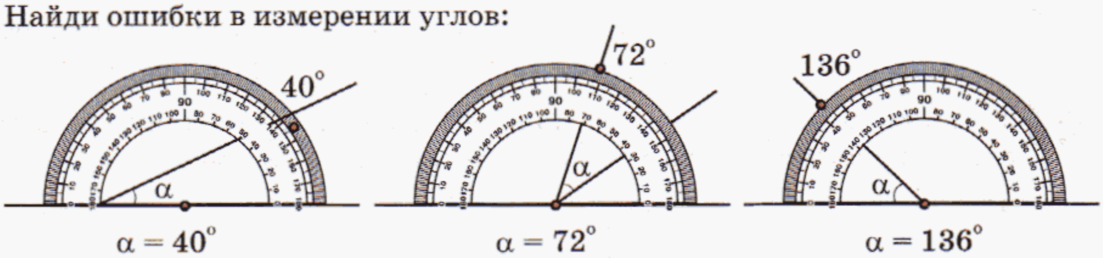
а) Как изменяется результат измерения углов при увеличении единицы измерения? При уменьшении единицы измерения?

б) Какими единицами измерения удобнее измерять углы – большими или маленькими? Почему?

в) Какая единица измерения углов является общепринятой? Известны ли тебе другие единицы измерения углов?

572 Чему равна градусная мера: а) прямого угла; б) острого угла; в) тупого угла; г) развернутого угла; д) угла, вертикального углу 75°; д) угла, смежного с углом 30°?

573 Найди ошибки в измерении углов:



574 По рис. 100 определи градусные меры углов:

а) AOC, AOD, AOE, AOF, AOK;

б) BOK, BOF, BOE, BOD, BOC;

в) COD, EOF, FOK, EOC, DOK, COF.

Почему транспортир удобно прикладывать так, чтобы одна из сторон угла проходила через *нулевую* отметку на его шкале?

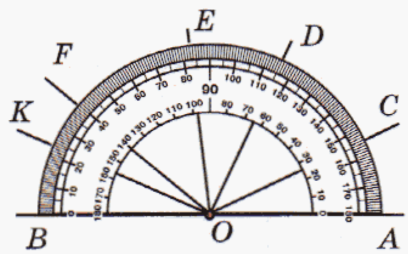
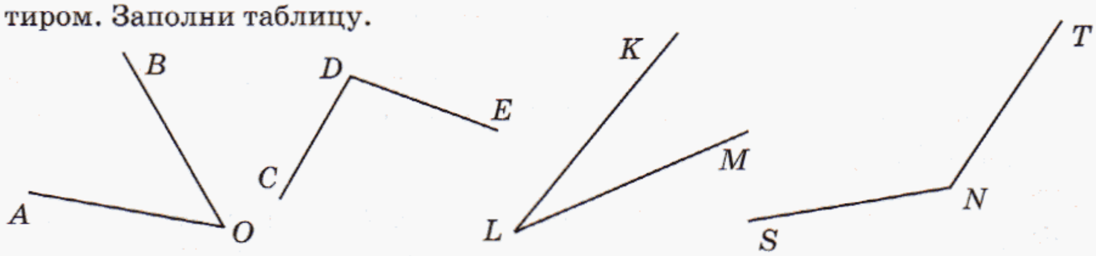


Рис. 100

575 Определи на глаз величины углов и проверь себя, измерив углы транспортиром. Заполни таблицу.



Название угла	Величина угла		Ошибка $d = \lvert a - b \rvert$
	на глаз (a)	измерением (b)	
$\angle AOB$			
$\angle CDE$			
$\angle KLM$			
$\angle SNT$			

576 Начерти луч OA. С помощью транспортира отложи от него углы 35° и 120°. Приведи все возможные варианты решения.

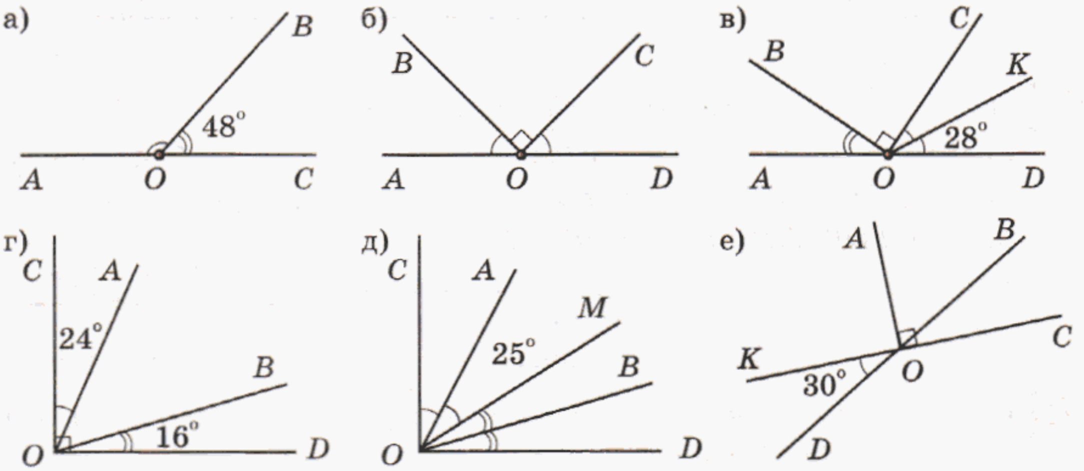
577 Построй с помощью транспортира угол ABC, равный: а) 58°; б) 116°. Проведи биссектрису угла ABC.

578 Построй с помощью транспортира угол CDE, равный: а) 72°; б) 150°. Раздели его на три равные части.

579 Построй с помощью транспортира угол MNK, если известно, что:
а) он равен $\frac{2}{9}$ развернутого угла; б) 0,75 его составляет прямой угол.

580 Построй с помощью транспортира два смежных угла, если один из этих углов: а) на 28° больше второго; б) в 5 раз меньше второго; в) составляет 25% второго; г) на 40% больше второго; д) на 20% меньше второго угла.

581 1) Найди по рисункам, не выполняя измерений, величину угла AOB (на каждом рисунке равные углы обозначены одинаковыми дугами):



2) Сколько на каждом из рисунков *острых* углов (x), *прямых* углов (y), *тупых* углов (z), *развернутых* углов (t)? Ответ дай в виде четырехзначного числа $\overline{xyzt}$.

582 В треугольнике ABC угол A равен 36°, а угол B равен 84°. Биссектрисы углов A и C пересекаются в точке O. Найди величину угла AOC, считая сумму углов треугольника равной 180°.

583 1) Построй четырехугольник $ABCD$ по координатам его вершин: $A\ (-4;\ 0)$, $B\ (2;\ 3)$, $C\ (5;\ 0)$, $D\ (0;\ -8)$. Измерь углы четырехугольника $ABCD$ и найди их сумму.
2) Начерти два произвольных четырехугольника и измерь их углы. Сравни полученные результаты и сделай вывод. Можно ли распространить этот вывод на любой четырехугольник? Почему?
3) Начерти произвольный четырехугольник и проведи его диагональ. Сколько получилось треугольников? Как связаны между собой углы этих треугольников и углы данного четырехугольника? Закончи предложение:

Если сумма углов треугольника равна 180°,
*то сумма углов четырехугольника равна*______________ .

Будет ли это предложение истинным для любого четырехугольника? Почему?

584 Построй треугольник ABC, используя линейку с делениями и транспортир, если: а) $AB = 5$ см, $BC = 3{,}5$ см, $\angle B = 76^\circ$; б) $AC = 4$ см, $\angle A = 32^\circ$, $\angle B = 58^\circ$; в) $AB = 6$ см, $\angle A = 47^\circ$; г) $BC = 3$ см, $\angle B = 110^\circ$, $\angle C = 24^\circ$. Какие из приведенных задач имеют единственное решение?

585 По рис. 101 объясни способ деления окружности на 5 равных частей с помощью транспортира. Раздели тем же способом окружность: а) на 6 равных частей; б) на 9 равных частей.

Рис. 101

Рис. 102

586 а) Ученикам 6 «А» класса был задан вопрос: «Какое из следующих занятий тебе нравится больше всего: чтение, спорт, прогулка, просмотр телевизионных передач?» При этом каждый выбирал только одно из этих занятий. Проанализируй результаты опроса с помощью круговой диаграммы (рис. 102). Измерь транспортиром углы секторов диаграммы и определи, сколько человек выбрали каждый ответ, если в 6 «А» всего 24 учащихся.

б) Тот же вопрос в 6 «Б» классе дал следующие результаты:

№	Выбранный ответ	Число учащихся
1	чтение	9
2	спорт	8
3	прогулка	6
4	телевизор	7

Построй круговую диаграмму и сравни вкусы учащихся обоих классов.

в) Проведи в твоем классе аналогичный опрос, построй круговую диаграмму и проанализируй полученные результаты.

587 Перенеси рис. 103 в тетрадь. Построй без транспортира, используя клеточки, угол в 90°, одной из сторон которого является: а) луч AB; б) луч CD.

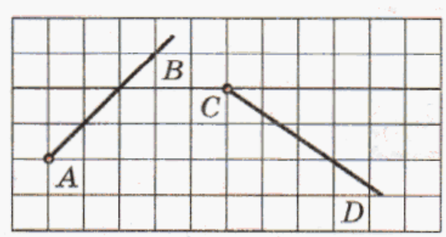


Рис. 103

588 Сколько градусов содержит угол между часовой и минутной стрелками часов в 3 ч, 6 ч, 8 ч, 10 ч, 11 ч, 14 ч 30 мин?

589 Вычисли устно и найди следующее число в ряду ответов при условии сохранения закономерности:

9,1	0,8	−0,4	−26	0,7
: 13	· 1,2	− 0,8	+ 17	: 0,2
+ 0,9	: 0,16	· 3	: (−6)	+ 1,5
· 2,5	− 4,8	+ 1,6	− 3	· 0,08
− 2,8	· 0,5	: (−20)	· 0,2	−1
?	?	?	?	?

?

590 Запиши выражение и найди его значение при данных значениях букв:
а) модуль числа, противоположного удвоенному произведению чисел a и b ($a = -\frac{3}{7}$; $b = -1{,}4$);
б) сумма модулей чисел c и d ($c = -0{,}8$; $d = 0{,}7$);
в) модуль разности частного чисел m и n и утроенного числа k ($m = 1{,}6$; $n = -3$, $k = -0{,}4$).

591 Переформулируй предложения, используя союз «если…, то…». Докажи, что обратные утверждения являются ложными, и построй их отрицания:
а) Четырехугольник является многоугольником.
б) Квадрат отрицательного числа положителен.

592 Где расположена на координатной плоскости точка M $(x; y)$, если:

а) $x > 0$, $y > 0$; в) $x < 0$, $y > 0$; д) $x > 0$, $y < 0$;
б) $x < 0$, $y < 0$; г) $x = 0$, $y = 0$; е) $x = 0$?

593 Построй на координатной плоскости несколько точек M $(x; y)$, у которых сумма абсциссы и ординаты равна 5 ($x \in Q$, $y \in Q$). Выскажи гипотезу о том, где расположены все такие точки. Где расположено множество точек, сумма абсциссы и ординаты которых больше 5, меньше 5? Является ли проведенное исследование доказательством высказанных утверждений?

594 Упрости выражения. Что ты замечаешь?
а) $3(8a - 6) - 2(9 + 4b) + 8(b - 3a)$;
б) $-0{,}5(8m - 7n) + 2{,}5(-2m + n) - 1{,}5(4n - 6m)$.

595 Реши уравнения:
а) $6 - 2(x + 7) = 4(2x - 3) - 12x$;
б) $3{,}8y - 1{,}2(5 - 2y) = 2{,}6(y - 3) - 0{,}9(2 - 4y)$.

596 а) Раздели число 360 в отношении 2 : 2,5 : 4,5.
б) Площади трех участков земли находятся в отношении $0{,}4 : 1\frac{2}{3} : \frac{14}{15}$, а сумма их площадей равна 90 га. На сколько гектаров третий участок больше первого?

597 Потренируй свой глазомер: начерти на листе бумаги без клеток 3 острых и 3 тупых угла, определи на глаз их градусную меру, а затем проверь себя, измерив углы транспортиром. Составь таблицу и занеси в нее полученные результаты (см. таблицу в № 575, стр. 135).

598 Начерти с помощью транспортира угол ABC, если известно, что: а) биссектриса делит его на два угла, равных 54°; б) угол ABC дополняет угол, равный 32°, до прямого угла; в) угол, смежный углу ABC, равен 160°; г) угол, вертикальный углу ABC, равен 127°.

599 Внутри прямого угла AOB провели луч OM так, что угол AOM: а) в 4 раза больше угла MOB; б) на 24° меньше угла MOB; в) составляет 50% угла MOB; г) на 50% больше угла MOB. Найди величину образовавшихся углов и сделай чертеж.

600 Начерти три произвольных параллелограмма и измерь их углы. Сравни полученные результаты и сформулируй *гипотезу*. Почему проведенное исследование не является доказательством этой гипотезы?

601 Два луча, проведенные из вершины развернутого угла, разбивают его на 3 части пропорционально числам $1 : \frac{1}{3} : 2\frac{2}{3}$. Найди величины этих углов и сделай чертеж.

602 Периметр прямоугольника равен 12 см, одна из сторон – x см, а площадь равна S см^2. Запиши формулу зависимости S от x. Заполни таблицу и построй график этой зависимости:

x	0	1	2	2,5	3	3,5	4	5	6
S									

Выскажи *гипотезу* о форме прямоугольника наибольшей площади. Почему проведенное исследование нельзя считать доказательством этой гипотезы?

603 Прочитай выражения и сравни их значения, если $a = -5{,}4$, $b = 0{,}84$:

$$|a + b| \text{ и } |a| + |b|.$$

Сравни эти же выражения еще для нескольких значений a и b, взятых по собственному выбору. Сформулируй *гипотезу* и попробуй доказать ее в общем виде.

604 Реши уравнения:

а) $5(2x + 6) - 3(x + 4) = 7x$; б) $1{,}6(y - 2) - 0{,}4(5 - 3y) = -0{,}8(4y + 2)$.

605 Вычисли и раздели полученное число в отношении 5 : 4:

$$19{,}44 : \left(\frac{\frac{5}{6}\cdot 2{,}4 - 1{,}5 : \left(2\frac{3}{7} - 1\frac{5}{14}\right)}{5\frac{1}{3} : \left(-2\frac{4}{7}\right)\cdot 3\frac{3}{8} : 1{,}4 : 0{,}1} - \frac{\left(27\frac{2}{5} - 36{,}2\right) : 1\frac{5}{6}}{4{,}04 : (0{,}52 + 2{,}005)}\right).$$

С **606** На угол в 20° смотрят через увеличительное стекло с десятикратным увеличением. Чему равна величина угла, наблюдаемого сквозь стекло?

607 Сколько пятиметровых прыжков надо сделать кенгуру, чтобы преодолеть дистанцию длиной 5032 м + 5032 дм +5032 см +5032 мм?

§ 4. Симметрия фигур

1. Красота и симметрия.

Отвечая на вопрос «Каков он, наш мир?», обычно говорят: огромный, прекрасный, разнообразный... Красота и разнообразие реальных объектов непосредственно связаны с такими их свойствами, как **симметричность**, то есть правильность, упорядоченность, повторяемость, гармония, и, наоборот, **асимметричность** – несимметричность, неправильность, нарушение порядка.

Сочетание симметричности и асимметричности создает основу эстетического восприятия человеком природы и произведений искусства. Посмотрите на цветок и бабочку, котенка и морскую звезду, античный Парфенон и высотное здание Московского университета, картины Леонардо да Винчи, Дюрера и Микеланджело и узоры знаменитых павловопосадских платков... Всюду здесь сочетание повторяющихся элементов создает ощущение соразмерности, порядка, гармонии, а изменчивость узора, окраски, положений тела, разнообразные башенки и завитки придают некую «изюминку», индивидуальность и неповторимость (рис. 104). Сравните их с тем, как невыразительно выглядит «абсолютно симметричный» жилой дом, лишенный специальных архитектурных деталей.

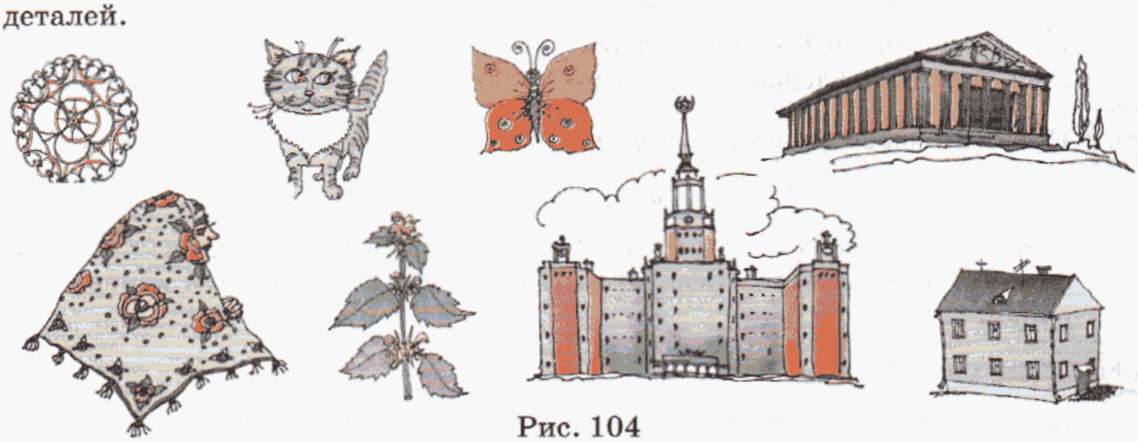


Рис. 104

Ритм и рифма в поэзии также отражают правильность, симметричность стихотворения. Например, если ударный слог обозначить единицей, а безударный нулем, то запись ритма новогодней песенки о елочке выглядит так:

010101***00***, 010101, 010101***00***, 010101.

Мы видим сразу же, что все строчки устроены почти одинаково. Иначе говоря, *ритмическая структура* этой песенки проста, что и естественно для незатейливой детской песенки. Напротив, сильное эстетическое впечатление производит удивительное сочетание симметрии и асимметрии в ритмической структуре стихотворения А.С. Пушкина «На холмах Грузии»:

На холмах Грузии лежит ночная мгла;	0101***0001***0101
Шумит Арагва предо мною.	0101***0001***0
Мне грустно и легко; печаль моя светла;	01***0001***010101
Печаль моя полна тобою.	010101010
Тобой, одной тобой… Унынья моего	01010101***0001***
Ничто не мучит, не тревожит,	0101***0001***0
И сердце вновь горит и любит – оттого,	01010101***0001***
Что не любить оно не может.	***0001***01010

Таким образом, симметрию можно наблюдать и в музыке, и в живописи, и в архитектуре. В произведениях великих композиторов, художников, архитекторов удивительным образом обнаруживаются одни и те же пропорции, совпадающие и с пропорциями человеческого тела, и с закономерностями расположения листьев на растениях.

Для описания этих закономерностей в геометрии введены специальные понятия, и прежде всего – строгое геометрическое понятие **симметрии**.

Самая простая из геометрических симметрий – **осевая симметрия**. Представление о ней можно получить при перегибании плоскости по некоторой прямой l: когда совмещаются либо две половинки одной фигуры F, либо две различные фигуры F_1 и F_2 (рис. 105). При этом прямая l называется *осью симметрии*, а сами фигуры (фигура F, либо пара фигур F_1 и F_2) называются *симметричными* относительно оси l.

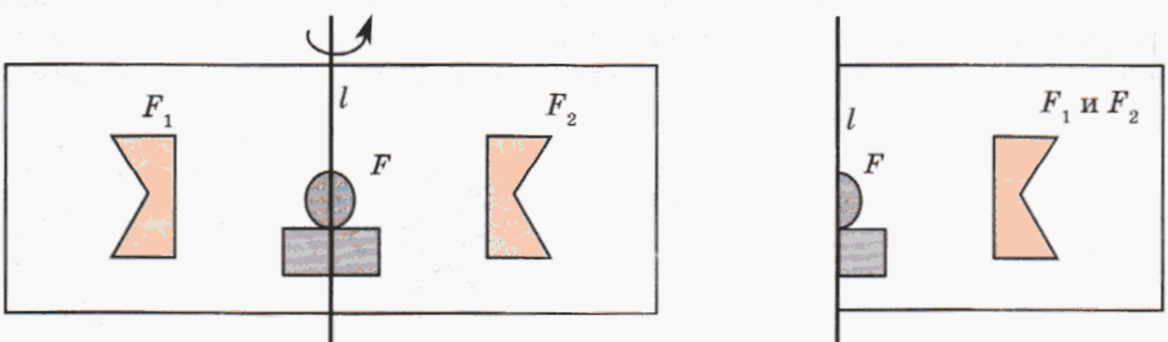


Рис. 105

Осевой симметрией обладают многие геометрические фигуры, причем число осей симметрии может быть различным: у равнобедренного треугольника одна ось симметрии, у равностороннего треугольника – три, у квадрата – четыре, а осью симметрии окружности является любая прямая, проходящая через ее центр (рис. 106).

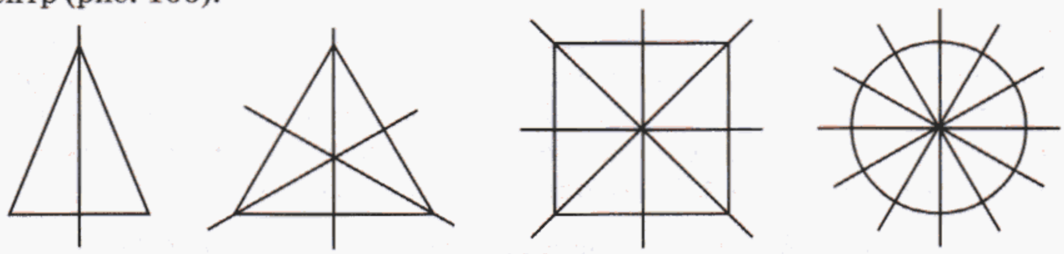


Рис. 106

Следующим видом симметрии является **поворот**. Чтобы представить его себе, наложим на лист бумаги с фигурой F кальку и обведем фигуру. Затем закрепим кальку в точке O и повернем ее на некоторый угол. В результате фигура F_1 перейдет в фигуру F_2, изображенную на кальке. На рис. 107 показан поворот фигуры F_1 вокруг точки O на угол $110°$ *против часовой стрелки*, а элементы веера на рис. 108 могут быть получены в результате поворотов на $20°$ как *по часовой*, так и *против часовой стрелки*.

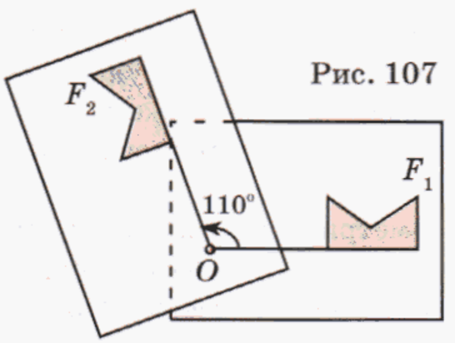


Рис. 107

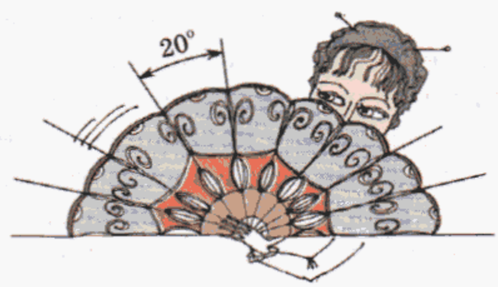


Рис. 108

Поворот на $180°$ имеет специальное название – **центральная симметрия** (рис. 109). Центр поворота называется *центром симметрии*, а сами фигуры – *центрально-симметричными*.

При центральной симметрии фигура может переходить сама в себя, тогда она также называется *центрально-симметричной*. Центрально-симметричной фигурой является, например, снежинка, изображенная на рис. 110а. А сочетание симметрии и асимметрии в салфетке на рис. 110б делает ее неповторимой.

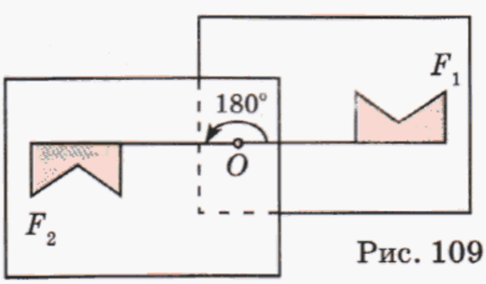


Рис. 109

а)

б)

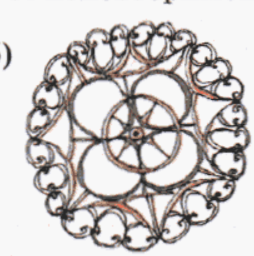


Рис. 110

В геометрии примерами центрально-симметричных фигур могут служить прямая, параллелограмм, окружность (рис. 111). Из этих примеров видно, что число центров симметрии также может быть различным: так, у прямой их бесконечно много, а у параллелограмма и окружности – по одному.

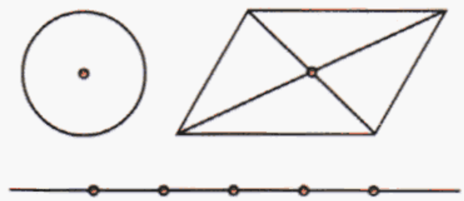


Рис. 111

Еще одним видом симметрии является **параллельный перенос**. Кальку с фигурой F_1 теперь просто сдвинем на расстояние $\vec{d}$ вдоль некоторой прямой l (прямая l при этом должна перейти сама в себя). Это удобно показать направленным отрезком длины d, который называют **вектором** и обозначают $\vec{d}$ (рис. 112).

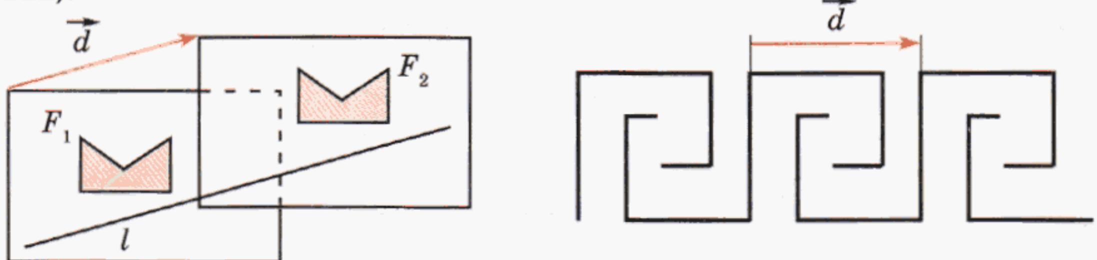


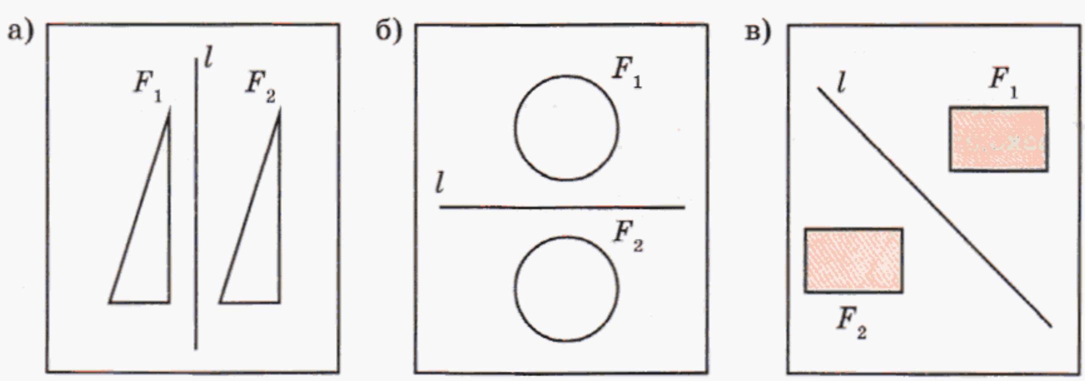
Рис. 112

Мы рассмотрели основные виды симметрии – осевую симметрию, поворот и параллельный перенос. Но красота рождается из симметрии лишь тогда, когда использование симметрии одухотворено фантазией, творчеством и мастерством.

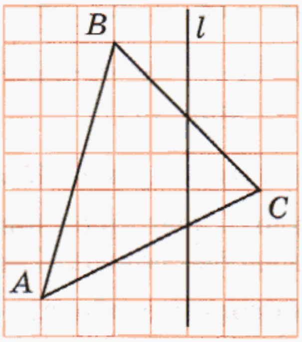
К **608** Приведи примеры сочетания симметрии и асимметрии из разных областей действительности.

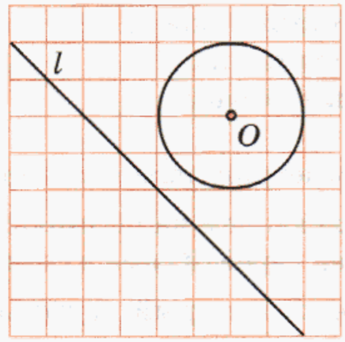
609 На лист бумаги капни чернилами, сложи его пополам, а потом разверни. Что можно сказать о получившихся на листе фигурах?

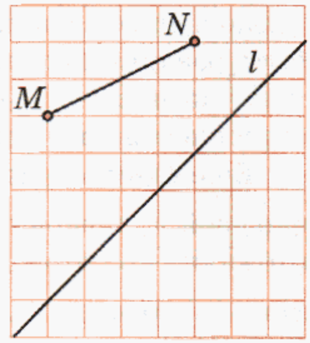
610 Как ты думаешь, симметричны ли данные фигуры относительно прямой l? Проверь свою гипотезу с помощью кальки.



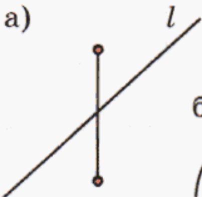
611 Перенеси рисунок в тетрадь и построй на глаз фигуру, симметричную данной относительно прямой l. Проверь правильность построения с помощью кальки.

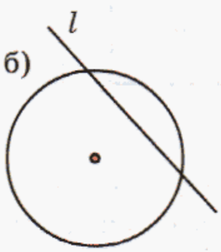
а) 

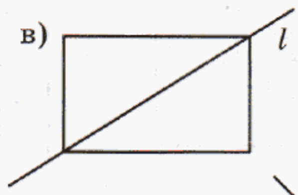
б) 

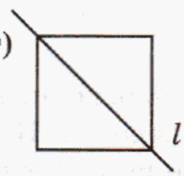
в) 

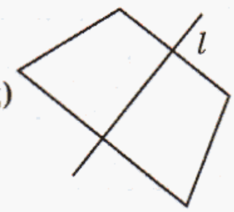
612 Является ли прямая l осью симметрии данных фигур? Проверь с помощью кальки.

а) 

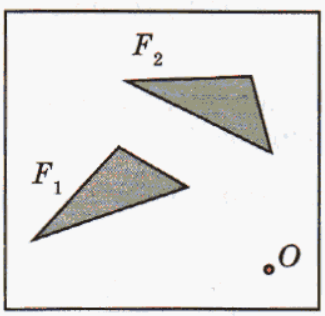
б) 

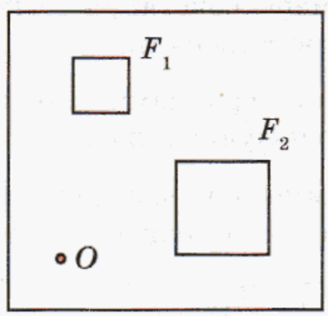
в) 

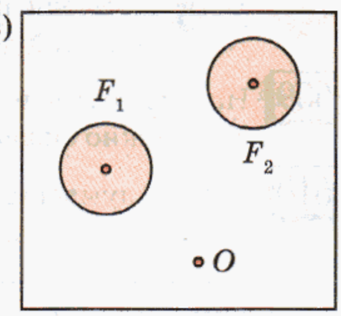
г) 

д) 

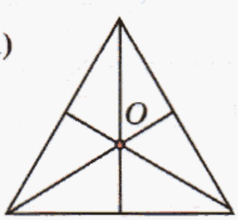
613 Определи с помощью кальки, получена ли фигура F_2 из фигуры F_1 с помощью поворота относительно точки O.

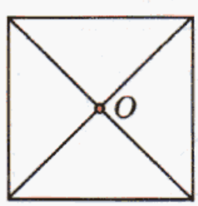
а) 

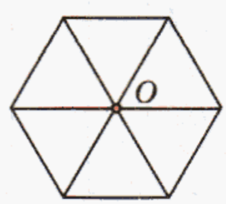
б) 

в) 

614 Укажи угол и направление поворота вокруг точки O, при котором фигура переходит сама в себя. Для каких фигур точка O является центром симметрии?

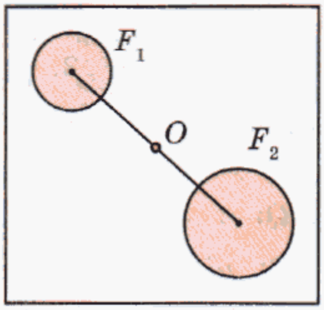
а) 

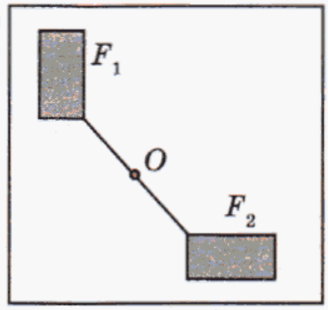
б) 

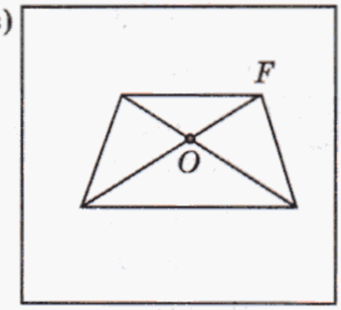
в) 

г) 

615 Являются ли фигуры центрально-симметричными относительно точки O? Проверь с помощью кальки.

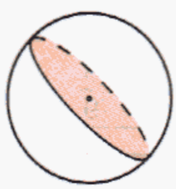
а) 

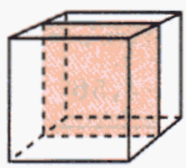
б) 

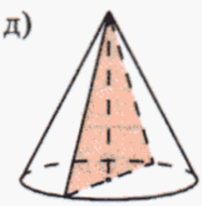
в) 

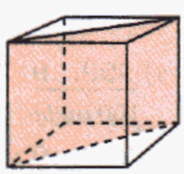
616 Вырежи из бумаги равносторонний и равнобедренный треугольники, квадрат, параллелограмм, окружность. С помощью перегибаний и поворотов найди их оси симметрии и центры симметрии. Сделай рисунки. Какая из этих фигур является «самой симметричной»?

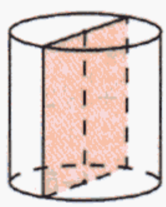
617 Плоскость α называют плоскостью симметрии, если пространственные фигуры «отражаются» в ней, как в зеркале. Какие из плоскостей, приведенных на рисунке, являются плоскостями симметрии данных фигур? Как можно было бы назвать этот вид симметрии?

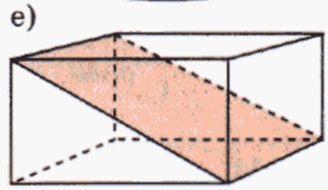
а) 

в) 

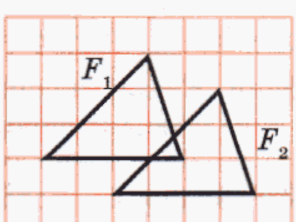
д) 

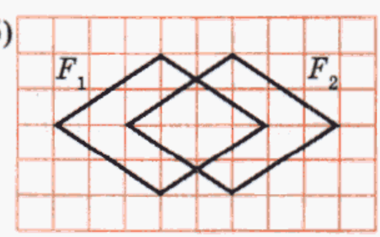
б) 

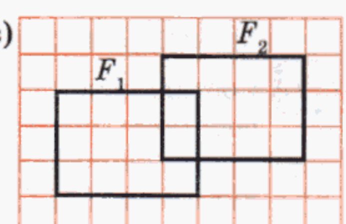
г) 

е) 

618 Воспроизведи рисунок и укажи вектор $\overrightarrow{d}$, задающий параллельный перенос фигуры F_1 в фигуру F_2:

а) 

б) 

в) 

619 Построй бордюр, который получается при последовательном параллельном переносе двух концентрических (имеющих один центр) окружностей радиусами 1 см и 2 см на 2 см вправо.

620 Найди закономерность и запиши n-й член последовательности чисел:

а) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$; в) 3, 6, 9, 12, 15, …; д) 1, 0, 1, 0, 1, 0, …;

б) −1, −4, −9, −16, −25, …; г) 5, 8, 11, 14, 17, …; е) $1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6} \ldots$

621 Прочитай высказывания и определи, истинны они или ложны. Построй отрицания ложных высказываний:

а) $\forall\, a \in Q\colon\ a < 0 \ \Rightarrow\ -a > 0$; в) $\forall\, x \in Q\colon\ x < 1 \ \Rightarrow\ |x| < 1$;

б) $\forall\, b \in Q\colon\ b < 1 \ \Rightarrow\ \frac{1}{b} > 1$; г) $\forall\, y \in Q\colon\ y^2 = 1 \ \Rightarrow\ |y| = 1$.

Верны ли обратные утверждения? Какие утверждения равносильны? Запиши их и прочитай разными способами.

622 Заполни таблицу и сделай вывод. Запиши его на математическом языке.

a	12	7	−5	4	0,9	2,5	0
b	3	8	2	−6	1,4	0,7	−5
$a - b$							
$b - a$							

623 Вычисли устно, если $m \neq n$:

а) $\dfrac{1{,}2 - 0{,}12}{0{,}12 - 1{,}2}$; б) $\dfrac{3{,}3 - \frac{3}{33}}{\frac{3}{33} - 3{,}3}$; в) $\dfrac{\frac{4}{56} - 4{,}56}{4{,}56 - \frac{4}{56}}$; г) $\dfrac{78{,}9 - 7\frac{8}{9}}{7\frac{8}{9} - 78{,}9}$; д) $\dfrac{m - n}{n - m}$.

624 Найди значения выражений:

а) $(-1)^1(-1)^2(-1)^3(-1)^4 \ldots (-1)^{2008}$; в) $2^{2008} + (-2)^{2008}$; д) $\underbrace{999\ldots9}_{100\ \text{цифр}} : 99$;

б) $(-1)^1(-1)^2(-1)^3(-1)^4 \ldots (-1)^{2009}$; г) $5^{2009} + (-5)^{2009}$; е) $\underbrace{999\ldots9}_{100\ \text{цифр}} : \underbrace{999\ldots9}_{50\ \text{цифр}}$.

625 Реши уравнения:

а) $|x| = 2{,}5$; в) $|x + 5| = 0$; д) $|x - 2| = -3$; ж) $|4 - 3x| = 2$;

б) $|x| = -4$; г) $|2x - 3| = 0$; е) $|x + 1| = 5$; з) $|2x + 7| = 1$.

626 Составь равенства, используя взаимосвязь условий. Какие задачи можно составить по этим условиям? Поставь вопросы так, чтобы решение задач было одинаковым.

а) Катер плыл 4 ч по реке со скоростью x км/ч и 2 ч по озеру со скоростью на 3 км/ч большей. Весь путь составил 78 км.

б) В зале расставили 78 стульев. В первых четырех рядах было по x стульев, а в каждом из двух остальных рядов — на 3 стула больше.

Придумай другие задачи, которые решаются так же.

627 Приведи примеры величин, которые связаны зависимостью $a = bc$. Построй математические модели задач, используя табличный способ записи условий. Придумай задачи с другими величинами, которые решаются так же.

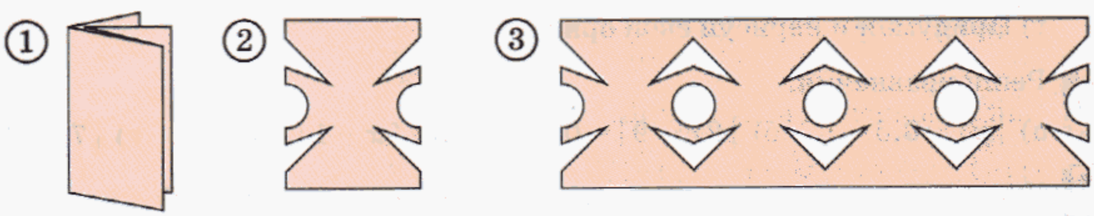
а) На 160 р. можно купить тетрадей в линейку на 2 больше, чем в клетку. Сколько тетрадей каждого вида можно купить, если тетрадь в линейку на 4 р. дешевле, чем тетрадь в клетку?

б) В каждом из двух домов по 112 квартир. Однако в первом доме на каждом этаже на одну квартиру больше, и поэтому число этажей в нем на 2 меньше, чем во втором. Сколько этажей в каждом доме?

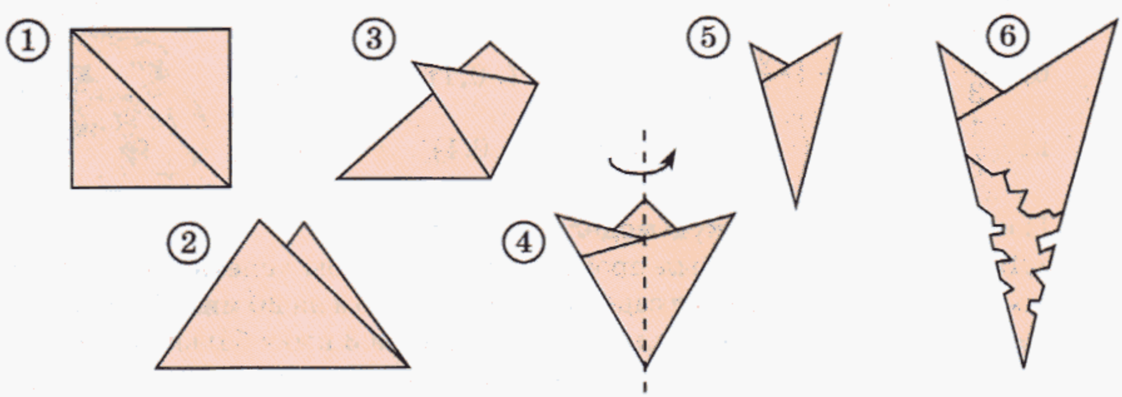
в) Первый автомат упаковывает в минуту на 3 пачки печенья больше, чем второй. Первому для упаковки 600 пачек печенья требуется на 10 мин меньше, чем второму. Сколько пачек в минуту упаковывает каждый автомат?

Д **628** а) Проанализируй ритмическую структуру нескольких строк какого-нибудь стихотворения. Наблюдается ли в них симметрия? Приведи несколько примеров симметрии из разных областей жизни.

б) Согни полоску бумаги несколько раз пополам, вырежь по контуру элемент орнамента и разверни, как показано на рисунке. Какие виды симметрии можно наблюдать в получившемся орнаменте?

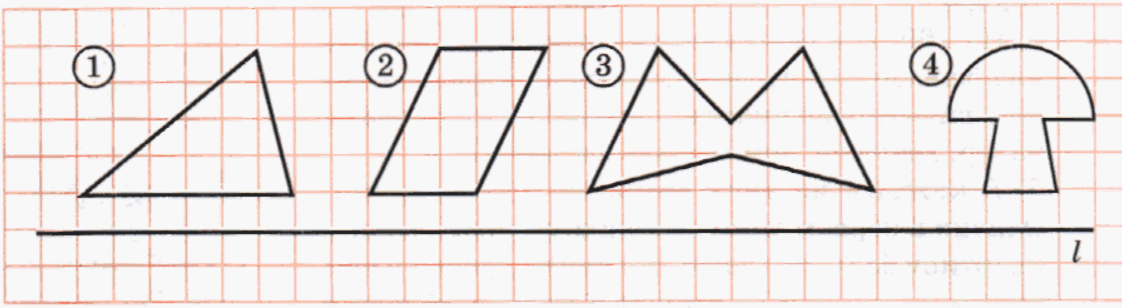


в) Согни последовательно лист бумаги, как показано на рисунке. Сделай вырезы на заготовке и разверни. Что получилось? Какими видами симметрии обладает получившаяся фигура?



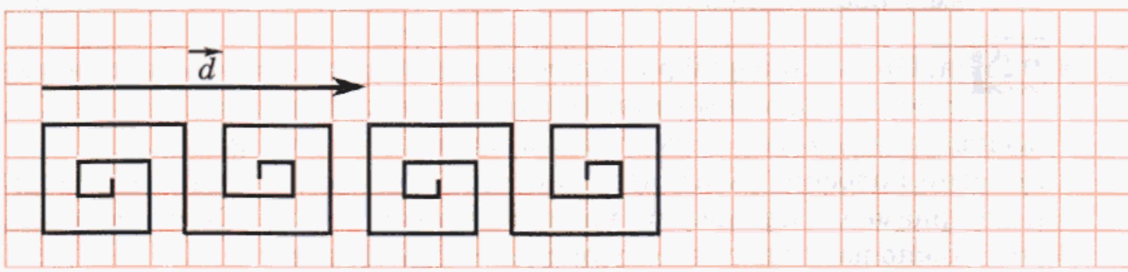
629 Выполни построения и проверь их правильность с помощью кальки:

а) Перенеси рисунок в тетрадь и построй фигуры, симметричные данным относительно прямой l:



б) Покажи на чертеже оси симметрии и центр симметрии прямоугольника.

в) Перерисуй орнамент в тетрадь и продолжи его. Какие виды симметрии можно наблюдать в этом орнаменте?



г) Придумай и нарисуй свой орнамент.

630 Реши уравнения:

а) $|x| = 3{,}6$; б) $|2x + 9| = 0$; в) $|3x - 1| = 5$; г) $|7 - x| = -2$.

631 У лисы Алисы в 5 раз больше монет, чем у кота Базилио. Если она подарит ему 16 монет, то монет у них станет поровну. Сколько монет у каждого?

632 Вычисли:

а) $\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^3$; г) $0{,}1 - 0{,}1^2 - 0{,}1^3$;

б) $-\frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^3$; д) $-0{,}1 + (-0{,}1)^2 + (-0{,}1)^3$;

в) $-\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right)^3$; е) $-0{,}1 - (-0{,}1)^2 - (-0{,}1)^3$.

633 Построй математическую модель задачи:

«Дядя Федор должен был проехать 30 км, чтобы успеть к поезду. Однако из-за кота Матроскина он задержался с выездом на 20 мин. Чтобы приехать на станцию вовремя, он ехал со скоростью на 3 км/ч бо́льшей, чем предполагал. С какой скоростью ехал дядя Федор?»

C **634** Слово **СЕНО** имеет горизонтальную ось симметрии, а слово **ШАЛАШ** – вертикальную. Кроме того, слово **ШАЛАШ** является *палиндромом* – при чтении его справа налево получается то же самое слово. Палиндромом является также предложение **АРГЕНТИНА МАНИТ НЕГРА.** Придумай свои примеры симметричных слов и палиндромов.

635 Сколько плоскостей симметрии имеют: а) прямоугольный параллелепипед; б) куб; в) конус; г) цилиндр; в) шар?

2. Преобразования плоскости. Равные фигуры.

В предыдущем пункте мы разобрали вопрос о том, как выяснить наличие или отсутствие разных видов симметрии фигур по рисунку. Но для математиков рисунок – это только иллюстрация, и поэтому нужно сначала дать точное определение видов симметрий на математическом языке, а в нем нет слов «перегнуть», «передвинуть», «вырезать».

Чтобы перейти от рисунка к определению, как мы уже знаем, нужно выявить характеристические свойства точек во всех видах симметрии. И вот здесь будет необходим наш опыт работы с симметричными фигурами.

Перегибая лист бумаги по оси симметрии l, мы наблюдаем, что отрезок AA_1 перпендикулярен прямой l и отрезки AM и A_1M равны (рис. 113). В результате приходим к следующему определению:

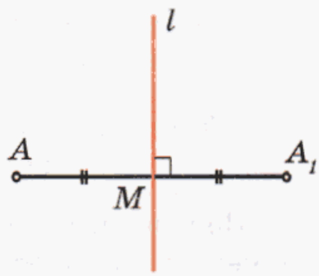


Рис. 113

Точки A и A_1, не принадлежащие прямой l, называются **симметричными относительно** l, если отрезок AA_1 перпендикулярен этой прямой и делится ею пополам.

При повороте вокруг точки O все точки плоскости движутся по окружностям с центром O, а значит, их расстояние до точки O не меняется. Кроме того, постоянными остаются угол поворота и направление поворота. Чтобы учесть направление поворота, углы поворота условились выражать рациональными числами: положительными – против часовой стрелки, а отрицательными – по часовой стрелке (рис. 114 *а*, *б*).

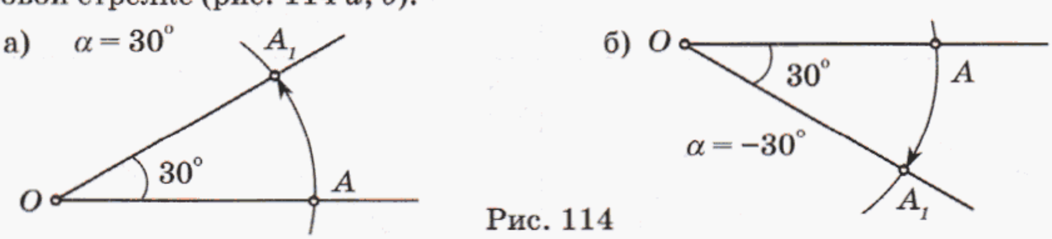


Рис. 114

Точка A_1 называется результатом **поворота** точки A вокруг центра O на угол α, если: 1) $OA = OA_1$; 2) $\angle AOA_1 = \alpha$.

Центральная симметрия является частным случаем поворота, когда угол поворота равен 180°. Особенностью центрально-симметричных точек является то, что они не только равноудалены от центра O, но и лежат на одной прямой с ним.

Таким образом, построение упрощается: для нахождения точки A_1, симметричной точке A относительно центра O, уже нет необходимости строить угол AOA_1, а можно просто провести прямую OA и отложить на ней отрезок OA_1, равный отрезку OA (рис. 115).

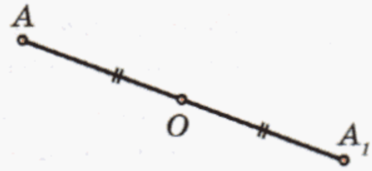


Рис. 115

> Точки A и A_1 называются **симметричными относительно точки** O, если O является серединой отрезка AA_1.

При параллельном переносе все точки движутся по параллельным прямым. При этом они смещаются в одном направлении и на одинаковое расстояние. А это означает, что векторы $\overrightarrow{AA_1}$ и $\vec{d}$ равны (рис. 116). Итак,

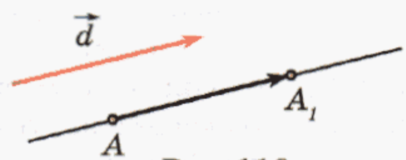


Рис. 116

> Точка A_1 называется результатом **параллельного переноса** точки A на вектор $\vec{d}$, если вектор $\overrightarrow{AA_1}$ равен вектору $\vec{d}$.

Полученные определения позволяют строить с помощью чертежных инструментов точки-образы во всех рассмотренных преобразованиях. А значит, мы можем строить теперь преобразования фигур более точно, не прибегая к перегибаниям листа, вырезанию фигур из бумаги и т.д. На рис. 117 показано, как построить треугольник $A_1B_1C_1$, в который переходит треугольник ABC при осевой симметрии (*а*), центральной симметрии (*б*), повороте на угол 120° (*в*) и параллельном переносе (*г*).

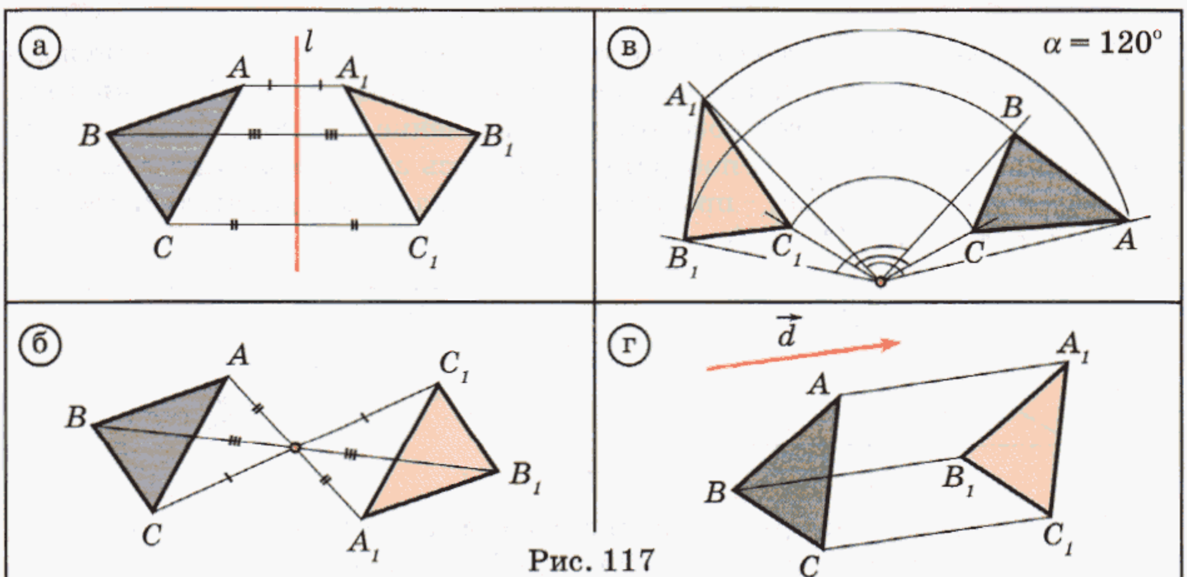


Рис. 117

Все описанные преобразования плоскости обладают важным общим свойством: в результате их выполнения получаются фигуры, которые можно совместить наложением, то есть **равные** фигуры. А значит, для обоснования равенства фигур достаточно показать, что эти фигуры могут быть получены друг из друга в результате данных преобразований.

Например, из того, что в равнобедренном треугольнике ABC медиана BD, проведенная к основанию, является осью симметрии, следует, что треугольники ABD и CBD равны, и поэтому равны их стороны и углы: $AD = DC$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4 = 90^\circ$ (рис. 118). Значит, медиана, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, является одновременно его биссектрисой и высотой!

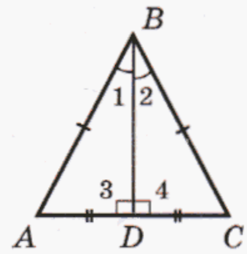


Рис. 118

Таким образом, симметрия фигур помогает устанавливать разнообразные геометрические факты без непосредственных построений и измерений. А это является новым мощным инструментом как для познания природы явлений, так и для решения практических задач.

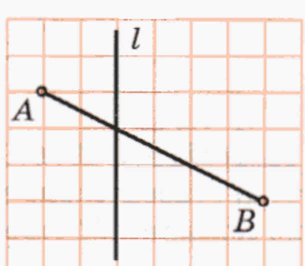
К **636** Перегни лист бумаги по прямой l и проткни его ножкой циркуля. Разверни лист и обозначь полученные точки буквами A и A_1. Найди их характеристическое свойство и сформулируй определение точек, симметричных относительно прямой l. Сравни свое определение с определением на стр. 149 учебника.

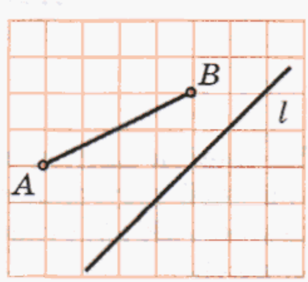
637 Для проведения перпендикуляра к прямой часто используют чертежный угольник, как показано на рис. 119.

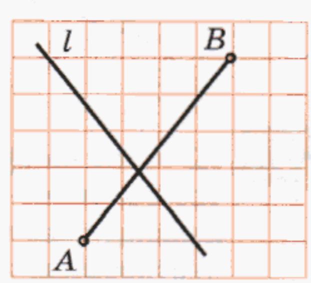
Рис. 119

На бумаге без клеток начерти прямую l и отметь точку $A \notin l$. Построй точку A_1, симметричную точке A относительно прямой l: а) с помощью чертежного угольника; б) с помощью циркуля и линейки (без делений).

638 Перенеси рисунок в тетрадь и построй отрезок A_1B_1, симметричный отрезку AB относительно прямой l.

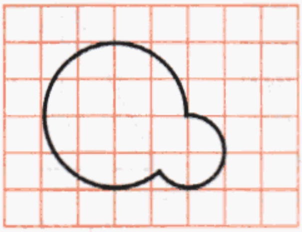
а) 

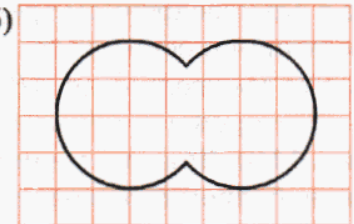
б) 

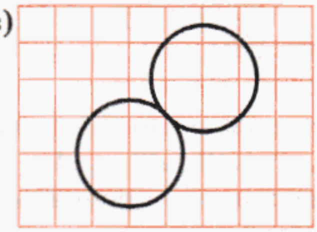
в) 

639 Построй окружность, симметричную данной относительно прямой l, если: а) прямая l не имеет с окружностью общих точек; б) прямая l касается окружности; в) прямая l пересекает окружность в двух точках.

640 Перечерти фигуры в тетрадь в масштабе 2 : 1 и проведи их оси симметрии:

а)


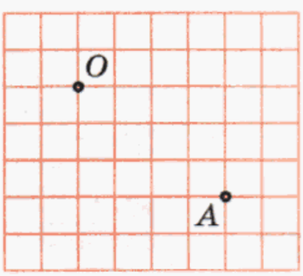
б)


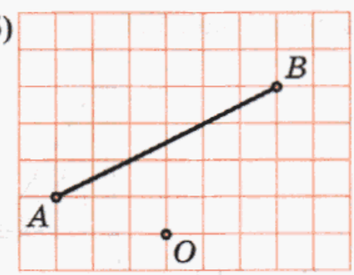
в)


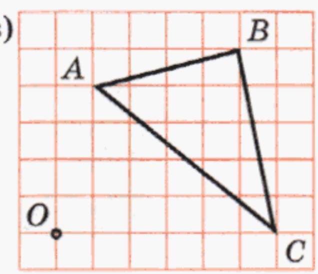
641 На бумаге без клеток начерти тупоугольный треугольник и построй симметричный ему треугольник относительно прямой l, содержащей: а) бо́льшую сторону; б) меньшую сторону; в) медиану, проведенную к его меньшей стороне.

642 Отметь на кальке точки O и A и поверни кальку вокруг точки O на угол α. Чем определяется положение точки A_1, полученной в результате поворота точки A? Сравни свои выводы с определением поворота на стр. 149 учебника.

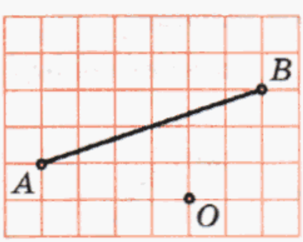
643 Воспроизведи чертеж и поверни: а) точку A на угол $\alpha = -80^\circ$; б) отрезок AB на угол $\alpha = 100^\circ$; в) треугольник ABC сначала на угол $\alpha = 90^\circ$, а потом на угол $\alpha = -90^\circ$. Что можно сказать о полученных треугольниках?

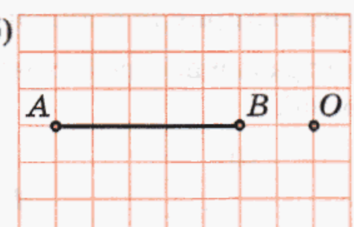
а)


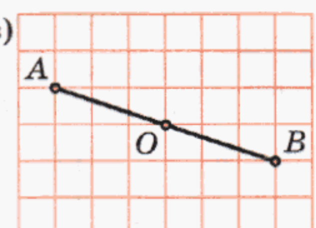
б)


в)


644 Скопируй рисунок в тетрадь и построй отрезок, симметричный отрезку AB относительно точки O.

а)


б)


в)


645 Начерти на бумаге без клеток произвольный треугольник ABC. Построй треугольник, симметричный треугольнику ABC: а) относительно точки O, лежащей вне треугольника ABC; б) относительно середины M стороны BC; в) относительно вершины A.

646 Точка O – центр симметрии шестиугольника $ABCDKM$ (рис. 120). Назови точки, симметричные точкам C, K, D, M относительно точки O. Какая фигура симметрична относительно точки O отрезку BO, треугольнику AOM, четырехугольнику $AOKM$, ломаной $BODK$, семиугольнику $ABOCDKM$?

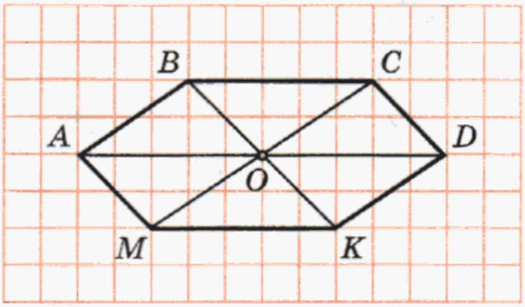


Рис. 120

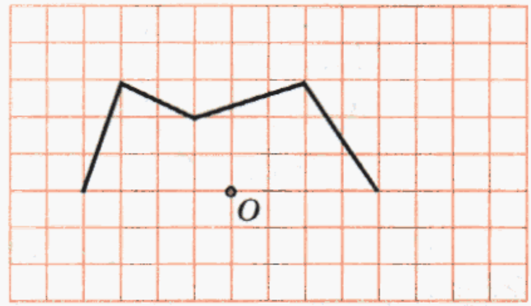


Рис. 121

647 На рисунке 121 изображена часть фигуры, центром симметрии которой является точка O. Начерти эту фигуру в тетради.

648 Точка A при параллельном переносе на вектор $\vec{d}$ переходит в точку A_1. Что означает равенство $\overrightarrow{AA_1} = \vec{d}$? Сделай чертеж.

649 Начерти в тетради параллелограмм $ABCD$. Построй фигуру, которая получится в результате параллельного переноса этого параллелограмма: а) на вектор $\overrightarrow{BC}$; б) на вектор $\overrightarrow{DB}$; в) на вектор $\overrightarrow{AO}$, где O – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$.

650 а) Если перемещать одну из сторон чертежного угольника вдоль линейки, то, проводя прямые вдоль другой его стороны, можно получить параллельные прямые (рис. 122). Построй указанным способом несколько параллельных прямых.

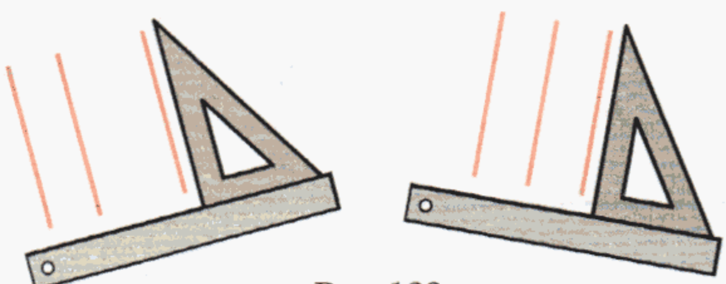


Рис. 122

б) Начерти на гладкой бумаге произвольный треугольник ABC и вектор $\vec{d}$. Построй параллельный перенос треугольника ABC на вектор $\vec{d}$.

651 Имеют ли отрезок, прямая, луч оси симметрии и сколько? Имеют ли они центры симметрии? Проиллюстрируй с помощью рисунков.

652 Начерти фигуру, которая: а) имеет и центр, и ось симметрии; б) не имеет оси, но имеет центр симметрии; в) не имеет центра, но имеет ось симметрии.

653 Построй фигуры, симметричные сектору круга (рис. 123, *а*) и сегменту круга (рис. 123, *б*) относительно точки O.

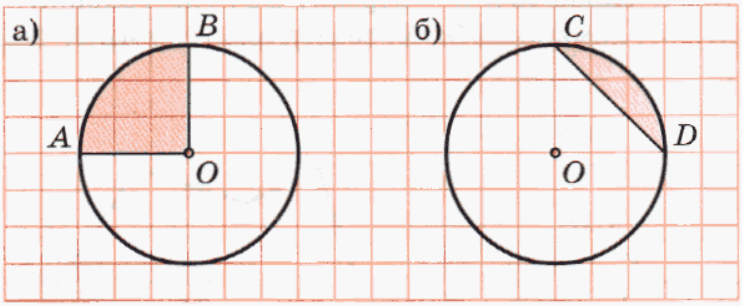


Рис. 123

654 Проведи на бумаге без клеток прямую l и ломаную $ABCD$, которая пересекает прямую l: а) в одной точке; б) в двух точках. Построй фигуру, симметричную ломаной $ABCD$ относительно прямой l.

655 Начерти отрезок AC и построй его серединный перпендикуляр l. Отметь на прямой l точку B и проведи отрезки AB и BC. Пользуясь свойствами симметрии, докажи, что: а) треугольник ABC – равнобедренный; б) углы при основании треугольника ABC равны; в) медианы, проведенные к боковым сторонам треугольника ABC, равны.

656 Начерти отрезок AB и отметь точку $O \notin AB$. Построй отрезок A_1B_1, симметричный отрезку AB относительно точки O. Равенство каких геометрических фигур следует из симметрии отрезков AB и A_1B_1?

657 Перенеси рис. 124 в тетрадь и построй на прямой l точку C так, чтобы длина ломаной ACB была наименьшей.

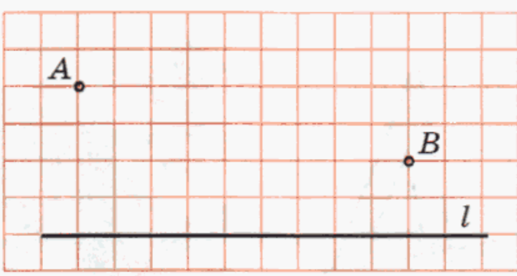


Рис. 124

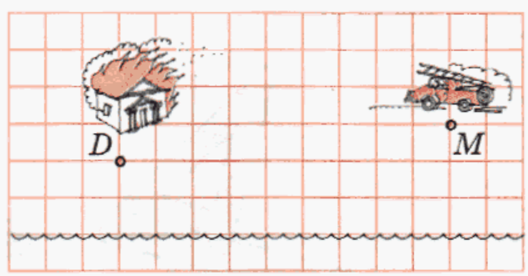


Рис. 125

658 Пожарная машина должна как можно быстрее добраться до горящего дома, заехав на реку за водой (рис. 125). Воспроизведи рисунок и построй кратчайший путь пожарной машины.

659 Вычисли устно:

а) $2 \cdot 31{,}8 \cdot 500$;	в) $12{,}5 \cdot 9{,}2 \cdot 80$;	д) $0{,}025 \cdot 7{,}2 \cdot 40$;
б) $0{,}574 \cdot 25 \cdot 4$;	г) $5{,}26 \cdot 0{,}4 \cdot 50$;	е) $0{,}2 \cdot 16{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}1$.

660 Известно, что $123 \cdot 456 = 56\,088$. Вычисли устно:

а) $1{,}23 \cdot 45{,}6$; б) $12{,}3 \cdot 0{,}456$; в) $0{,}123 \cdot 4560$; г) $0{,}0123 \cdot 4{,}56$.

661 Прочитай высказывания и определи, истинны они или ложны. Построй отрицания ложных высказываний:

а) $\exists\, a \in Q\colon\ 2a < a$; в) $\forall\, m, n \in Q\colon\ m + n \geqslant m - n$;

б) $\forall\, b \in Q\colon\ b^2 \geqslant b$; г) $\exists\, x, y \in Q\colon\ xy < x : y$.

662 Запиши высказывания на математическом языке и определи, истинны они или ложны: а) модули противоположных чисел равны; б) число, противоположное произведению двух чисел, равно произведению чисел, противоположных множителям; в) число, противоположное сумме двух чисел, равно сумме чисел, противоположных слагаемым.

663 Сократи, если возможно, дроби со знаменателями, не равными нулю:

а) $\dfrac{a+b}{b+a}$; б) $\dfrac{-x-y}{x+y}$; в) $\dfrac{c-d}{d-c}$; г) $\dfrac{-m+n}{n-m}$; д) $\dfrac{k-l}{k+l}$.

664 Найди значения выражений:

а) $\dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 - 7 \cdot 8 \cdot 9}{7 \cdot 8 \cdot 9 - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$; б) $\dfrac{51 \cdot 52 \cdot 53 \cdot 54 - 50 \cdot 51 \cdot 52 \cdot 53}{52 \cdot 53 \cdot 54 \cdot 55 - 51 \cdot 52 \cdot 53 \cdot 54}$.

665 Сравни с нулем:

а) a^2; в) $a^2 + 3$; д) $(a + 2)^2$; ж) $-4(a^2 + 2)$;

б) $-a^2$; г) $-a^2 - 3$; е) $(a - 2)^2$; з) $(a - 2)^2 + 3(b + 4)^2$.

666 Реши уравнения:

а) $2(2 - x) + 3(2x + 4) = 7$; в) $10(3y - 2) - 5(4y - 11) = 25 + 3(5y - 2)$;

б) $\dfrac{6x-4}{5} - \dfrac{2-x}{4} = \dfrac{3x+1}{2}$; г) $\dfrac{15}{x} + \dfrac{7}{1{,}2x} = 25$.

667 Катер проплывает расстояние между двумя поселками, стоящими на берегу реки, за 3 ч против течения реки и за 2 ч 20 мин по течению реки. Скорость течения реки равна 3 км/ч. Чему равна собственная скорость катера?

668 Рыболов отправился на лодке от пристани по течению реки. Назад ему надо вернуться через 6 ч. Собственная скорость лодки 8 км/ч, а скорость течения реки 2 км/ч. На какое наибольшее расстояние может отъехать рыболов, если во время своей поездки он планирует пробыть на берегу 4 часа?

669 Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 200 км, одновременно выезжают автомобиль и автобус. Скорость автомобиля на 60% больше скорости автобуса. Во время пути автомобиль делает получасовую остановку, но, несмотря на это, прибывает в пункт B на час раньше автобуса. С какой скоростью ехал автомобиль?

670 Построй математическую модель задачи:

а) Лыжник должен был проехать 8 км с определенной скоростью, чтобы вернуться в туристический лагерь к обеду. В середине пути он задержался на 10 мин. Однако, увеличив скорость на 2 км/ч, приехал в лагерь вовремя. С какой скоростью ехал лыжник вторую половину пути?

б) Лодка может проплыть 20 км по течению реки и еще 15 км против течения реки за то же время, которое требуется плоту, чтобы проплыть 75 км по этой реке. Скорость лодки 10 км/ч. Чему равна скорость течения реки?

671 Найди значения выражений:

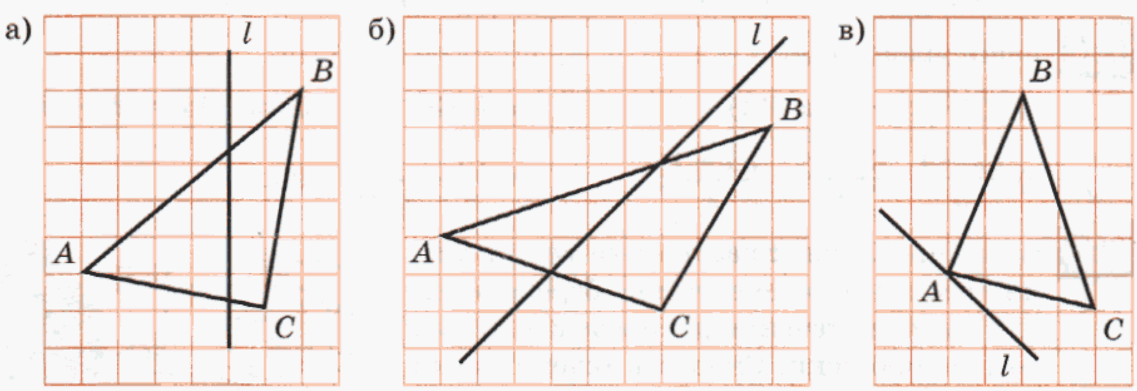
а) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}$;

б) $\frac{1}{6\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 10}$;

в) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\frac{1}{10\cdot 13}+\frac{1}{13\cdot 16}$;

г) $\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 14}+\frac{1}{14\cdot 17}+\frac{1}{17\cdot 20}$.

672 Скопируй рисунок и построй треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно прямой l. Проверь правильность построений с помощью кальки.



673 а) Построй треугольник ABC, у которого $\angle A = 90^\circ$, $AB = BC = 4$ см. Определи вид этого треугольника.

б) Построй треугольник $A_1B_1C_1$, который получается из треугольника ABC при повороте вокруг вершины A на угол $\alpha = 45^\circ$.

в) Начерти прямую l, относительно которой треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ симметричны. Проверь это с помощью кальки.

674 Начерти треугольник ABC со сторонами $AB = 4$ см, $BC = 2$ см, $AC = 5$ см. Построй треугольник $A_1B_1C_1$, центрально-симметричный треугольнику ABC относительно вершины B. Является ли точка B центром симметрии четырехугольника ACA_1C_1? Как это доказать?

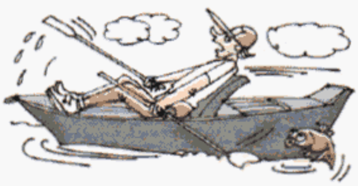
675 Построй орнамент, который получается при последовательном параллельном переносе трех концентрических окружностей с радиусами 1 см, 2 см и 3 см на 3 см вправо. Начерти вектор $\vec{d}$, задающий этот параллельный перенос. Раскрась орнамент, соблюдая «ритм».

676 На гладкой бумаге начерти равносторонний треугольник и построй его оси симметрии. Есть ли у равностороннего треугольника центр симметрии? При каких поворотах равносторонний треугольник переходит сам в себя?

677 Реши уравнения:

а) $15x - 1 = 3(x - 5)$; б) $\dfrac{y-4}{2} - \dfrac{2y+6}{0,5} = -8\dfrac{2}{5}$; в) $\dfrac{4}{m} - \dfrac{3}{1,5m} = -0,8$.

678 Спортивная лодка, двигаясь против течения реки, проплыла расстояние от турбазы до города за 2 ч 15 мин, а обратный путь – за 1,5 ч. Скорость течения реки равна 2 км/ч. Чему равна собственная скорость лодки?



679 В воскресный день Денис с друзьями отправляются на лодке от причала, предполагая вернуться назад через 4 ч. Перед возвращением они хотят побыть на берегу не менее 2 ч 30 мин. На какое наибольшее расстояние они могут отплыть, если скорость течения реки равна 2,5 км/ч, а собственная скорость лодки – 7,5 км/ч?

680 Болельщик хочет успеть на стадион к началу матча. Если он пойдет из дома пешком со скоростью 4 км/ч, то опоздает на 15 мин, а если поедет на велосипеде со скоростью 16 км/ч, то приедет на полчаса раньше. На каком расстоянии от дома находится стадион?

681 Найди 40% от числа:

$$\frac{-153,9 : (-3,8) - \left(2\frac{1}{4} - \frac{5}{6}\right) : \left(\frac{1}{6} - 3\right) + 156,8 \cdot (-0,25)}{(-0,6)^2 : 0,2^3 + (-5)^3 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^2 - (-2)^4}.$$

682 Найди число, 3,6% которого равны: $\dfrac{3 + 4,2 : 0,1}{\left(1 : 0,3 - 2\frac{1}{3}\right) \cdot 0,3125}$.

683 Построй математическую модель задачи:

«Поезд был задержан у семафора на 8 мин и ликвидировал опоздание на перегоне в 40 км, увеличив скорость на 15 км/ч. Чему равна скорость поезда по расписанию?»

684 Выполни действия:

а) $\underbrace{999\ldots9}_{100\text{ цифр}} + 2$; б) $\underbrace{999\ldots9}_{100\text{ цифр}} + \underbrace{222\ldots2}_{100\text{ цифр}}$; в) $\underbrace{333\ldots3}_{100\text{ цифр}} \cdot 7$; г) $\underbrace{333\ldots3}_{100\text{ цифр}} \cdot 11$.

С **685** **Числовые ребусы.**

Поставь вместо букв цифры так, чтобы указанные равенства выполнялись. Одним и тем же буквам в каждом примере всегда соответствуют одни и те же цифры, а разным – разные.

а) *Морской*

$$\begin{array}{r} \times\ \text{КРАБ} \\ \text{4} \\ \hline \text{БАРК} \end{array}$$

б) *Туристский*

$$\begin{array}{r} +\ \text{ВАГОН} \\ \text{ВАГОН} \\ \hline \text{СОСТАВ} \end{array}$$

в) *Научный*

$$\begin{array}{r} \text{КНИГА} \\ +\ \text{КНИГА} \\ \text{КНИГА} \\ \hline \text{НАУКА} \end{array}$$

г) *Сказочный*

$$\begin{array}{r} \text{ДЕДКА} \\ +\ \text{БАБКА} \\ \text{РЕПКА} \\ \hline \text{СКАЗКА} \end{array}$$

3. Правильные многоугольники.

Среди различных фигур на плоскости внимание художников и ученых всегда привлекали многоугольники, обладающие разными видами симметрии. Особый интерес представляют выпуклые многоугольники, у которых все стороны и все углы равны. Такие многоугольники называются **правильными.**

Рис. 126

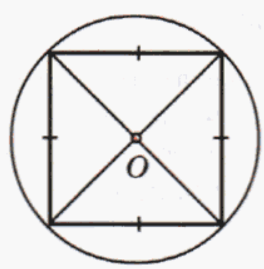


Рис. 127

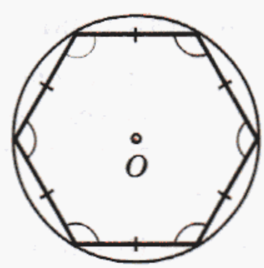


Рис. 128

Примерами правильных многоугольников являются уже знакомые нам равносторонний треугольник и квадрат (рис. 126–127). Мы знаем, что около них можно описать окружность. Оказывается, *вершины любого правильного многоугольника лежат на одной окружности.*

Значит, для построения правильного n-угольника достаточно разделить окружность на n равных частей и последовательно соединить точки деления (рис. 128). Тогда при повороте плоскости вокруг центра этой окружности на угол, кратный $\frac{360^\circ}{n}$, многоугольник перейдет сам в себя. Следовательно, все его стороны и углы равны, то есть многоугольник является правильным.

Указанным образом легче всего построить правильный шестиугольник: он состоит из шести правильных треугольников, и поэтому длина его стороны равна радиусу описанной окружности. Значит, чтобы разделить окружность на 6 равных частей, можно «пройтись» по окружности циркулем с шагом, равным ее радиусу. Соединив последовательно все точки деления, получим правильный шестиугольник (рис. 129).

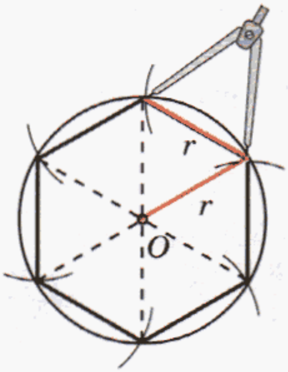


Рис. 129

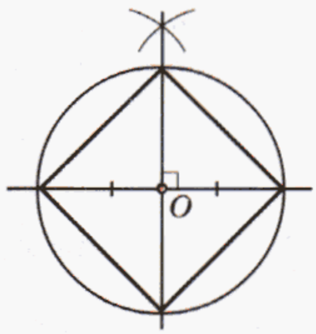


Рис. 130

Рис. 131

Если же точки деления соединить не подряд, а через одну, то получится правильный треугольник. Для построения квадрата можно провести два взаимно перпендикулярных диаметра (рис. 130), а разделив образовавшиеся дуги пополам, построим правильный восьмиугольник (рис. 131).

Эти и другие способы построения правильных многоугольников знали еще древние греки. Но несколько тысячелетий прошло прежде, чем удалось доказать, что некоторые правильные многоугольники – например, с числом сторон 7, 9, 11, 13 – в принципе нельзя построить с помощью циркуля и линейки. Это открытие принадлежит немецкому математику К. Гауссу (1777–1855 гг.).

Свойства правильных многоугольников позволяют использовать их при составлении *паркетов*, то есть при покрытии плоскости фигурами без зазоров и пересечений. С паркетами мы часто встречаемся в повседневной жизни. Простейшими паркетами являются обычная тетрадь «в клеточку» и паркет, составленный из правильных треугольников.

Паркетами из правильных многоугольников покрывают полы в домах, украшают стены комнат и зданий.

Примером паркета, созданного природой, является плоский срез пчелиных сот. Оказывается, пчелы «выбрали» такую конструкцию своих жилищ не случайно – математические расчеты показали, что она не только красива, но очень экономична и прочна.

На рис. 132 изображен паркет из правильных треугольников, переходящий в паркет из правильных шестиугольников.

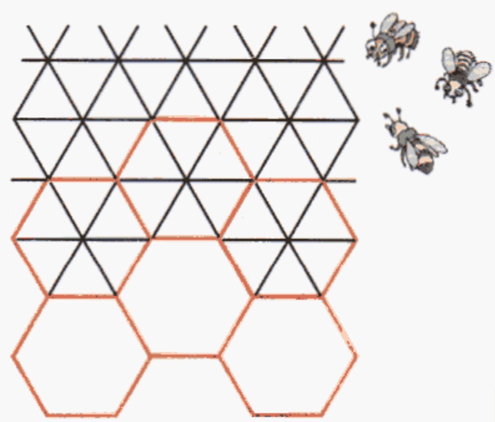


Рис. 132

Геометрические фигуры могут «встретиться» в вершине паркета только тогда, когда сумма их углов составляет 360°, иначе они не сомкнутся вокруг вершины или «налезут» друг на друга. Именно поэтому в треугольном паркете в каждой вершине сходится шесть фигур, в квадратном – четыре, в шестиугольном – три.

Других паркетов из правильных многоугольников одного вида быть не может – в этом можно убедиться, исследовав величины их углов. А вот паркетов, состоящих из правильных многоугольников разного вида, довольно много, и все они очень красивы. Пример одного из них приведен на рис. 133.

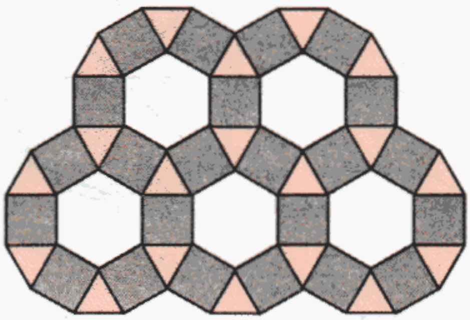
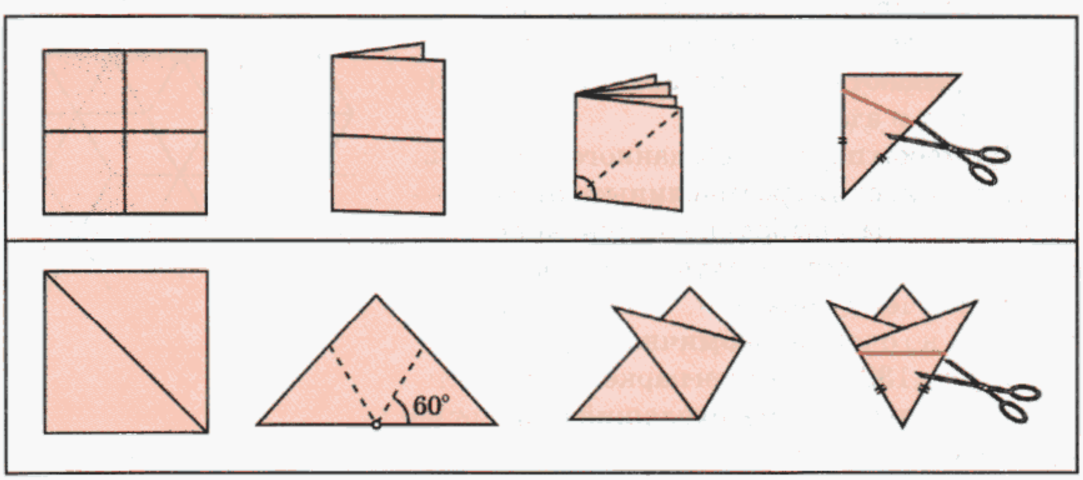


Рис. 133

Рис. 134

Паркеты можно составлять не только из правильных многоугольников, но и, например, из прямоугольников, параллелограммов, трапеций. Яркими примерами паркетов являются паркеты голландского художника-математика Эшера (рис. 134). Каким же воображением нужно обладать, чтобы создать столь своеобразные и неповторимые произведения!

686 Перегни лист бумаги так, как показано на рисунке. Отметь на линиях сгиба равные отрезки OA и OB, сделай разрез по отрезку AB и разверни лист. Как называется полученная фигура? Какими видами симметрии она обладает?



687 а) Вычисли периметр правильного шестиугольника со стороной 4,5 см.
б) Периметр правильного пятиугольника равен 9 см. Чему равна длина его стороны?

688 Построй: а) правильный шестиугольник со стороной 3 см; б) правильный треугольник с радиусом описанной около него окружности 2,5 см; в) квадрат с диагональю 7 см; г) правильный восьмиугольник с радиусом описанной около него окружности 4 см. Есть ли у этих многоугольников оси симметрии, центр симметрии? Обладают ли они поворотной симметрией?

689 а) Центр O окружности, описанной около правильного n-угольника, соединен с двумя его последовательными вершинами A и B (рис. 135). Чему равна величина угла AOB?
б) Как, зная величину угла AOB, построить правильный n-угольник с помощью транспортира? Построй правильный пятиугольник и определи, есть ли у него оси симметрии, центр симметрии. При каких поворотах он переходит сам в себя?

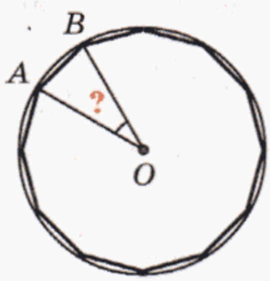


Рис. 135

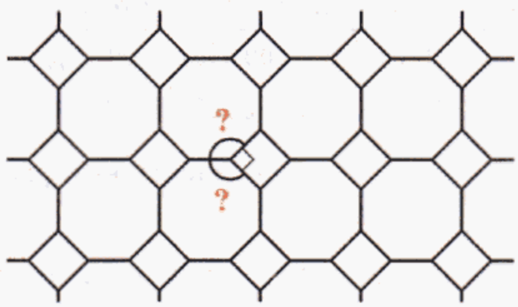


Рис. 136

690 Паркет составлен из правильных восьмиугольников и квадратов (рис. 136). Найди величину угла правильного восьмиугольника.

691 Величина угла правильного n-угольника вычисляется по формуле:

$$\alpha = \frac{180(n-2)}{n}.$$

Пользуясь этой формулой, вычисли величину угла правильного n-угольника для $n = 3, 4, 5, 6, 9, 12, 15, 20$.

692 Можно ли составить паркет: а) из правильных треугольников и квадратов; б) из правильных пятиугольников; в) из правильных треугольников и шестиугольников; г) из правильных восьмиугольников? Если возможно, то покажи, как многоугольники «сходятся» в общей вершине.

693 Нарисуй в тетради паркет, составленный: а) из одинаковых ромбов; б) из одинаковых параллелограммов.

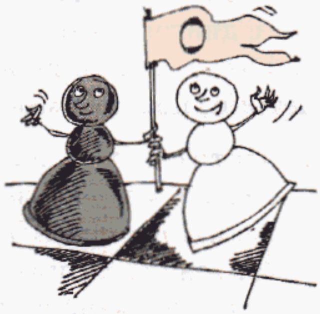
694 Вырежи из бумаги 20 одинаковых произвольных треугольников и составь из них паркет. Всегда ли это можно сделать? Почему?

695 Найди корни уравнений (устно):

а) $x - \frac{1}{4} = -0{,}2$; в) $-0{,}9 - x = 0{,}6$; д) $-3{,}6x = 0$; ж) $2{,}4 : x = -0{,}5$;

б) $3{,}2 - x = 5$; г) $-x + 1{,}6 = -2{,}4$; е) $x \cdot (-4) = 1$; з) $-x : 0{,}25 = 0{,}8$.

696 Запиши высказывание на математическом языке и определи, истинно оно или ложно: а) сумма противоположных чисел равна 0; б) произведение взаимно обратных чисел равно единице; в) число, обратное произведению двух чисел, равно произведению чисел, обратных множителям; г) число, обратное сумме двух чисел, равно сумме чисел, обратных множителям.



697 Что больше:

а) $\underbrace{88\ldots8}_{100\ цифр} \cdot \underbrace{33\ldots3}_{100\ цифр}$ или $\underbrace{55\ldots5}_{100\ цифр} \cdot \underbrace{66\ldots6}_{100\ цифр}$; в) $\frac{25}{99}$ или $\frac{2525}{9999}$; д) $\frac{29}{36}$ или $\frac{17}{24}$;

б) $252{,}5 \cdot 3{,}636$ или $25{,}25 \cdot 36{,}36$; г) $\frac{25}{127}$ или $\frac{2524}{127127}$; е) $\frac{25}{39}$ или $\frac{35}{51}$?

698 а) Найди два числа, разность которых равна 6, а одно из них составляет $\frac{2}{7}$ другого.

б) Одно число на 40% меньше другого, а их сумма равна 16,8. Какие это числа?

699 В феврале в городе N выпало рекордное количество снега. В первую неделю выпало 20% всего снега, во вторую – на 25% больше, чем в первую, в третью – $\frac{2}{3}$ того, что выпало за первые две недели вместе, а в четвертую – остальные 45 мм. Сколько всего миллиметров снега выпало в городе N в феврале?

700 Построй математическую модель задачи:

а) Расстояние между городами A и B равно 120 км. Из A в B выехал грузовик, а через 20 мин вслед за ним – автобус, скорость которого на 20 км/ч больше скорости грузовика. С какой скоростью ехал грузовик, если он прибыл в B на 10 мин позже автобуса?

б) Из поселков A и B, расстояние между которыми 16 км, одновременно навстречу друг другу вышли два пешехода и встретились в 6 км от A. Чему равна скорость пешехода, вышедшего из A, если до встречи он сделал получасовую остановку и его скорость на 1 км/ч меньше скорости пешехода, вышедшего из B?

701 Найди значения выражений:

а) $4\frac{2}{7} \cdot 8\frac{5}{9} - 4\frac{2}{7} \cdot 6\frac{2}{9}$;   в) $\frac{3}{5} : 1\frac{2}{5} : 1\frac{2}{7} : 1\frac{2}{9} : 1\frac{2}{11} : 1\frac{2}{13}$;

б) $-3{,}52 \cdot 2{,}4 - 1{,}48 \cdot 2{,}4$;   г) $(-2)^1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (-2)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 \cdot (-2)^5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^6 \cdot (-2)^7$.

702 Реши уравнения, пользуясь разветвленным определением модуля:

а) $|x| - 1 = x$;   б) $3|x| + 2x = 5$;   в) $x + 2|x| = -5$;   г) $x - |x| = -0{,}4$.

703 а) Построй «цветок», изображенный на рис. 137.
б) Построй правильный двенадцатиугольник.

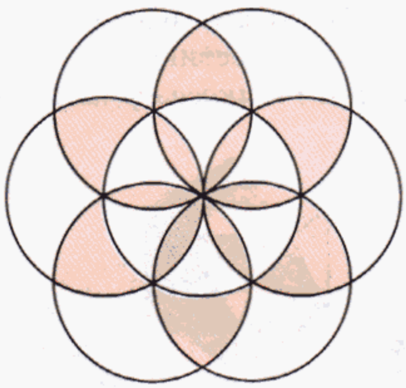


Рис. 137

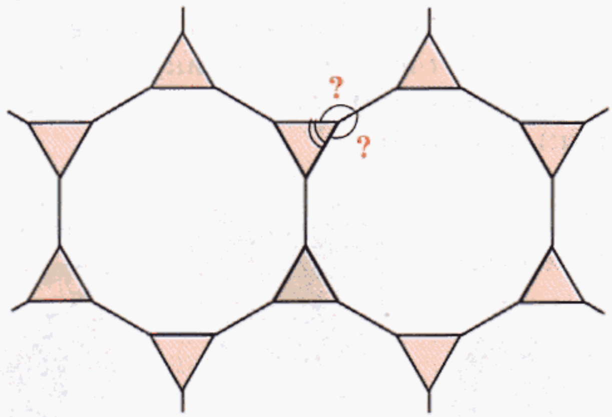


Рис. 138

704 а) На рис. 138 изображен паркет из правильных треугольников и двенадцатиугольников. Найди величину угла правильного двенадцатиугольника.
б) Можно ли составить паркет из правильных двенадцатиугольников, треугольников и квадратов?

705 Килограмм моркови дороже килограмма картофеля на 3,6 р. За 3 кг картофеля и 4 кг моркови заплатили 115,2 р. На сколько процентов картофель дешевле моркови?

706 Построй математическую модель задачи:
«Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 6 км, вышли два пешехода. Первый пешеход вышел из A на 10 мин позже, чем второй, но пришел в B на 5 мин раньше. С какой скоростью шел каждый пешеход, если скорость первого на 0,5 км/ч больше скорости второго?»

707 Реши уравнения, пользуясь разветвленным определением модуля:

а) $2|x| - x = 4$;   б) $|x| - 8 = -3x$.

708 Найди значения выражений:

а) $\left(1{,}6 \cdot 1{,}5 - \left(1\frac{3}{5}\right)^2\right) : 1\frac{3}{5}$;   б) $\dfrac{1\frac{1}{3} \cdot (-54{,}54)}{-121{,}2}$;   в) $\dfrac{0{,}3 \cdot \left(-1\frac{1}{3}\right) \cdot 0{,}15}{-1{,}2 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) \cdot 0{,}36}$.

С **709** Составь паркет из правильных треугольников и шестиугольников.

710 Можно ли составить развертку параллелепипеда, не являющегося кубом, из шести одинаковых прямоугольников?

4. Правильные многогранники.

Своеобразным пространственным аналогом правильных многоугольников являются **правильные многогранники** – геометрические тела, у которых все грани – равные правильные многоугольники, а углы между гранями равны.

Правильных многогранников всего пять. По числу граней их называют *тетраэдр* (четырехгранник), *куб* (гексаэдр, или шестигранник), *октаэдр* (восьмигранник), *додекаэдр* (двенадцатигранник) и *икосаэдр* (двадцатигранник) (рис. 139).

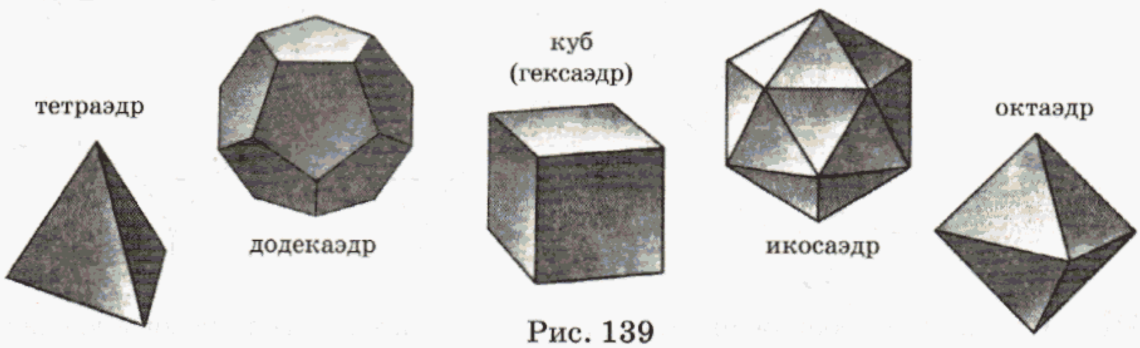


Рис. 139

Они обладают «наибольшей» симметрией, поэтому в древности их называли «идеальными», «космическими» телами, а древнегреческий философ Платон считал, что они олицетворяют сущность природы. Поэтому их называют еще телами Платона.

Из правильных многогранников – *платоновых* тел – можно получить так называемые *полуправильные* многогранники, или *архимедовы* тела. Гранями их являются также правильные, но разноименные многоугольники. Несколько примеров архимедовых тел приведено на рис. 140.

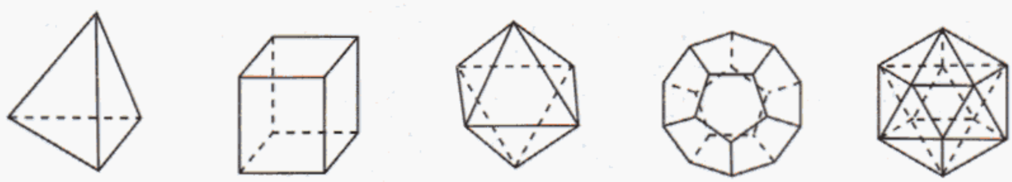
Рис. 140

Тела Архимеда получаются из правильных многогранников с помощью операции «усечения», то есть отсечения углов плоскостями. А продолжение их граней и ребер позволяет получить *звездчатые* многогранники, или *тела Кеплера-Пуансо* (рис. 141).

Рис. 141

Теория правильных многоугольников и многогранников – один из самых увлекательных и ярких разделов математики. Закономерности, открытые математиками, удивительным образом связаны с симметрией живой и неживой природы – с формами различных кристаллов, точной формой вирусов, с современными теориями в физике, биологии и других областях знания. Так, например, вершины снежинки всегда образуют правильный шестиугольник, а хорошо знакомый нам куб природа реализовала в форме кристаллов поваренной соли.

К **711** Сколько ребер и сколько граней сходится в вершине тетраэдра, гексаэдра, октаэдра, додекаэдра, икосаэдра? Выведи их общее свойство.



712 а) Сосчитай число ребер (Р) , граней (Г) и вершин (В) каждого правильного многогранника и заполни таблицу. Какие закономерности ты наблюдаешь?

Правильный многогранник	Р	В	Г
Тетраэдр			
Гексаэдр (куб)			
Октаэдр			
Додекаэдр			
Икосаэдр			

б) Проверь, выполняется ли для правильных многогранников формула Эйлера: Г + В – Р = 2.

713 На рис.142 изображены развертки правильных многогранников. Определи, какая развертка какому многограннику соответствует.

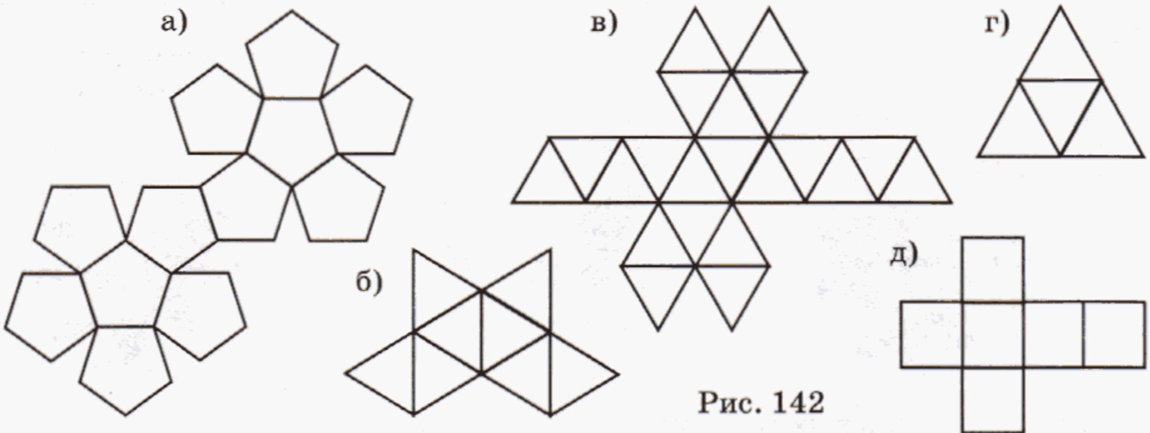


Рис. 142

714 а) Какие многоугольники могут получаться при пересечении плоскостью правильного тетраэдра, гексаэдра (куба)? б) Построй сечение тетраэдра $ABCD$ плоскостью, проходящей через его вершины – A, B и середину M ребра CD. в) Построй сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершины A_1, D, C_1.

715 Реши примеры, сопоставь полученным ответам соответствующие буквы и расшифруй латинское название многогранника, открытого в XVI веке Леонардо да Винчи. На русском языке он называется «звездчатый октаэдр».

O $-0,6-0,8$	**U** $20:(-0,4)$	**E** $-1\frac{8}{9}:3,4$
C $-5,4:0,06$	**B** $-0,15:1,5$	**K** $9,6:(-0,001)$
G $-\frac{3}{11}\cdot 5,5$	**S** $-2\frac{7}{12}-1\frac{3}{4}$	**N** $-3\frac{11}{15}+8\frac{2}{5}$
L $3,2-9$	**A** $-10:(-18)$	**T** $-50\cdot(-0,16)$

$-4\frac{1}{3}$	8	$-\frac{5}{9}$	$-5,8$	$-5,8$	$\frac{5}{9}$

$-1,4$	-90	8	$\frac{5}{9}$	$4\frac{2}{3}$	$-1,5$	-50	$-5,8$	$\frac{5}{9}$

716 Вычисли среднее арифметическое ряда чисел: 8; 14; 52; 67; 93; 126. Используя полученный результат, определи среднее арифметическое ряда чисел:

а) 0,8; 1,4; 5,2; 6,7; 9,3; 12,6; б) 800; 1400; 5200; 6700; 9300; 12 600.

717 От пристани в город, расстояние между которыми по озеру равно 24 км, отправилась лодка, а через 15 мин вслед за ней вышел теплоход. Скорость лодки относится к скорости теплохода как 1,5 : 4. С какой скоростью шел теплоход, если он пришел в город на час раньше лодки?

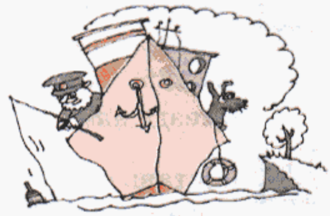
718 Пароход за 10 ч прошел вниз по реке 224 км, а вверх – на 62,5% меньше. Чему равна средняя скорость парохода?

D **719** Склей из бумаги модель правильного октаэдра, гранями которого являются равносторонние треугольники со стороной 8 см.

720 Катер прошел некоторое расстояние против течения реки за 4 ч, а то же самое расстояние по течению реки – на 30 мин быстрее. Найди собственную скорость катера, если скорость течения реки равна 2,4 км/ч.

721 Найди неизвестный член пропорции:

$$\frac{\frac{9}{55}-\frac{9}{44}:1{,}5+\frac{4}{11}}{1{,}2:0{,}75-2\frac{6}{25}:5{,}6}=\frac{1{,}8\cdot 0{,}25-3{,}36:3{,}2}{x}.$$



C **722** Раскрась грани разверток всех правильных многогранников так, чтобы было минимальное число цветов, а соседние грани склеенной модели не были одного цвета.

Задачи для самопроверки.

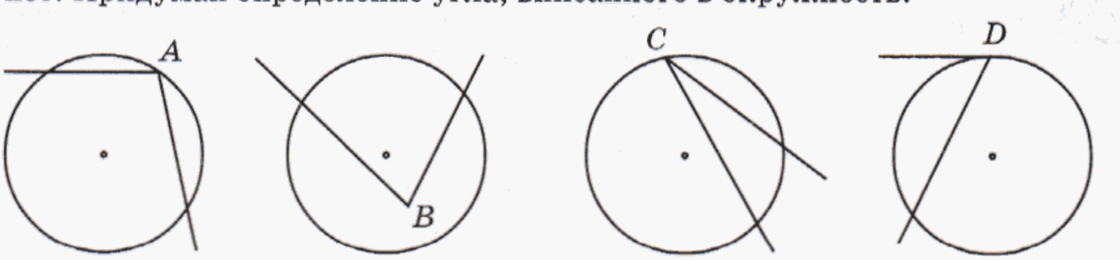
723 Прочитай определения, назови определяемые понятия и понятия, на которые они опираются. Сделай рисунки и установи логическую последовательность введения этих определений.

а) Диаметром окружности называется хорда, проходящая через ее центр.

б) Хордой окружности называется отрезок, соединяющий две ее точки.

в) Окружностью называется множество всех точек плоскости, находящихся на одинаковом расстоянии от заданной точки, называемой центром окружности.

724 Углы A и C на рисунке являются *вписанными* в окружность, а углы B и D – нет. Придумай определение угла, вписанного в окружность.



725 Построй с помощью циркуля и линейки треугольник ABC: а) по двум сторонам a и b; б) по трем сторонам a, b и c; в) по двум сторонам a и b и углу между ними C; г) по стороне a и двум прилежащим к ней углам B и C (стороны и углы задай произвольно). Сколько решений имеет задача? Всегда ли решение возможно?

726 Найди множество корней уравнения:

а) $-5x + 7 = 4x - 8$; в) $3(5 - 2z) - 4(z + 6) = -5(2z + 3)$;

б) $2\left(\frac{y}{7} - 3\right) + 1,5 = y + \frac{5}{14}$; г) $-0,7x - 2(0,4x - 2,8) = -1,6 + 3(-0,5x + 2,4)$.

727 Катер за полчаса по течению реки и 1 ч 20 мин против течения проплыл 58 км. Какое расстояние проплывет по этой реке плот за 2 ч 40 мин, если скорость катера против течения на $16\frac{2}{3}\%$ меньше его скорости по течению?

728 В 11 ч 35 мин из Москвы по Рижскому шоссе выехал автобус со скоростью 75 км/ч, а в 12 ч 15 мин вслед за ним выехал автомобиль, скорость которого на 28% больше скорости автобуса. Через сколько времени после своего выезда автомобиль обгонит автобус на 20 км?

729 Составь выражение и найди его значение при данных значениях букв:

а) Килограмм сметаны стоит a руб., а килограмм сыра на 50% дороже. Сколько стоит покупка 200 г сметаны и 400 г сыра? ($a = 60$)

б) Цена акций некоторого предприятия сначала увеличилась на 10%, а затем уменьшилась на 10%. Сколько стала стоить акция, если ее прежняя цена b руб.? ($b = 500$)

в) Самолет пролетел x км, а осталось ему пролететь y км. Сколько процентов всего пути составляет оставшийся путь? ($x = 480$, $y = 720$)

730 Запиши значение выражения в виде бесконечной периодической дроби:

а) $\dfrac{-0,12 \cdot 0,5 + 0,12}{\left(-0,125 + \frac{3}{8}\right) : \left(-\frac{2}{3}\right)^2}$; б) $\dfrac{(1,47 : 1,4 - 1,5) \cdot \left(-3\frac{2}{3}\right) : (-2,7)}{\left(-\frac{7}{18} + \frac{5}{12} \cdot (-0,4)\right) : 4\frac{1}{6} + \frac{1}{30}}$.

731 Начерти параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и назови: а) одно его видимое и одно невидимое ребро; б) одну видимую и одну невидимую грань. Вычисли его объем и площадь поверхности, если $AB = 5$ м, $AD = 6$ м, $AA_1 = 4$ м.

732 Начерти в масштабе 1 : 4 три проекции тела, изображенного на рис. 143, и вычисли его объем, если $AB = AA_1 = AF = 20$ см, $BC = 12$ см, $CD = 8$ см.

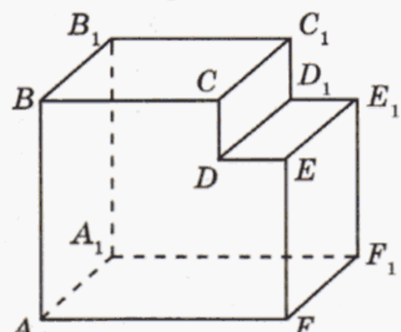


Рис. 143

733 Построй на координатной плоскости треугольник ABC, если $A\ (-2; -5)$, $B\ (0; 3)$, $C\ (8; 5)$. Измерь стороны и углы треугольника ABC и определи его вид.

734 Построй треугольник ABC, используя линейку с делениями и транспортир, если: а) $AB = 6$ см, $BC = 4$ см, $\angle B = 56^\circ$; б) $BC = 5$ см, $\angle B = 105^\circ$, $\angle C = 32^\circ$; в) $AC = 4,5$ см, $\angle A = 74^\circ$. Сколько решений имеет каждая задача?

735 Реши уравнения:

а) $\dfrac{9x-15}{0,4}=\dfrac{7-5x}{\frac{1}{3}}$; б) $\dfrac{8y+45}{15-4y}=\dfrac{5\frac{1}{3}}{1\frac{7}{9}}$; в) $\left(1\frac{1}{9}z-2\right):\frac{3}{5}=\left(4\frac{1}{6}+8\frac{1}{3}z\right):4\frac{1}{2}$.

736 Лучи, исходящие из вершины развернутого угла, делят его на 4 части. Первый угол относится ко второму как $2,4:1\frac{5}{7}$, третий – на 15° меньше первого, а четвертый – в 3 раза больше третьего. Найди величины этих углов и сделай чертеж.

737 Граница арены цирка имеет длину 40,8 м. Пользуясь формулами, приведенными на стр. 127, найди диаметр и площадь арены. Число π округли до целых.

738 Опытный дрессировщик может вымыть слона за 40 мин, а его сын – за 2 ч. За сколько времени они вымоют трех слонов, работая вместе?

739 Выполни действия:

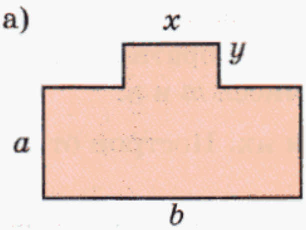
а) (14 м 2 см – 9 дм 64 мм) : 6,4 + 0,36 м;

б) (3,24 а · 0,125 – 134 дм^2 40 см^2) : 7,8 – 0,00045 га;

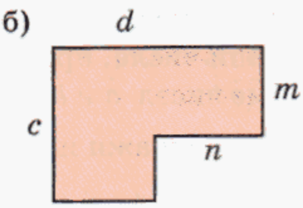
в) (17,5 дм^3 · 400,8 – 3,216 м^3 : 1,6) : 1,39 + 7 200 000 см^3.

740 Составь формулы для вычисления периметра многоугольника:

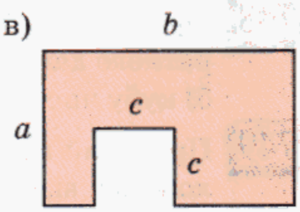
а)



б)

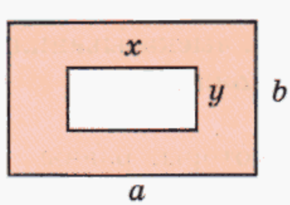


в)

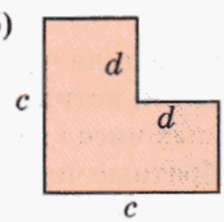


741 Составь формулы для вычисления площади фигуры:

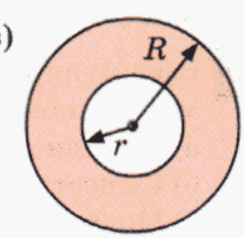
а)



б)

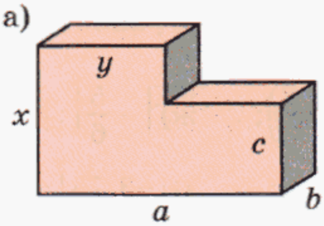


в)

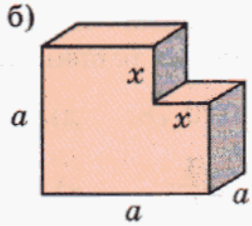


742 Составь формулы для вычисления объема фигуры:

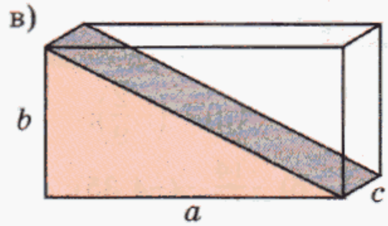
а)



б)



в)



Задачи на повторение.

743 Начерти диаграмму Эйлера–Венна множеств: N – натуральных чисел; Z – целых чисел; Q – рациональных чисел; M – отрицательных чисел. Отметь на этой диаграмме числа: $\frac{1}{3}$; -2; $1\frac{5}{16}$; 0; $4{,}5$; 7; $-8\frac{2}{9}$.

744 Найди наименьшее натуральное число, кратное 36, в записи которого встречаются все 10 цифр по одному разу.

745 Сформулируй алгоритм сравнения рациональных чисел. Сравни дроби $\left(-\frac{3}{7}\right)$ и $\left(-\frac{5}{9}\right)$ пятью различными способами.

746 Среди обыкновенных дробей найди те, которые можно представить в виде конечных десятичных. Расположи их в порядке возрастания и сопоставь соответствующим буквам. Что означает полученное слово?

$-\frac{25}{14}$	$\frac{3}{60}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{5}{12}$	$-\frac{29}{58}$	$\frac{18}{24}$	$\frac{9}{25}$	$-\frac{10}{45}$	$\frac{4}{300}$	$\frac{21}{56}$
М	И	Г	Р	О	Л	К	Е	Т	А

747 Можно ли сравнить на множестве рациональных чисел:

1) a и $-a$; 3) a и $a+2$; 5) a и $a-2$; 7) a и a^2;

2) a и $\frac{1}{a}$; 4) a и $2a$; 6) a и $a:2$; 8) $(-a)^2$ и $-a^2$?

748 Сформулируй определение числа, противоположного данному, и числа, обратного данному. Запиши числа, противоположное и обратное: а) числу x; б) кубу числа y; в) сумме чисел a и b; г) разности чисел m и n.

749 Прочитай высказывания, докажи или опровергни их. Построй отрицания ложных высказываний.

а) $\forall\, x \in Q$: $x + (-x) = 0$; в) $\forall\, a \in Q$: $-a < 0$; д) $\forall\, m \in Q$: $-(-m) = m$;

б) $\exists\, y \in Q$: $y \cdot \frac{1}{y} \neq 1$; г) $\exists\, b \in Q$: $\frac{1}{b} = -b$; е) $\forall\, n \in Q$: $1 : \frac{1}{n} = n$.

750 Сформулируй определение модуля числа. Запиши высказывания на математическом языке и определи, истинны они или ложны:

а) Модули противоположных чисел равны.

б) Существуют взаимно обратные числа, модули которых равны.

в) Модуль произведения двух чисел равен произведению их модулей.

г) Модуль разности двух чисел может быть больше разности их модулей.

751 Реши примеры и расскажи, какие алгоритмы действий с рациональными числами использовались для их решения:

а) $-1{,}6 + \left(-\frac{2}{9}\right)$; в) $-\frac{3}{25} - 0{,}78$; д) $-4{,}8 \cdot \left(-10\frac{2}{3}\right)$; ж) $\left|-\frac{5}{6}\right| : |-1{,}25|$;

б) $-\frac{14}{15} - (-4{,}35)$; г) $0{,}9 - 2\frac{1}{6}$; е) $1\frac{1}{5} : (-0{,}18)$; з) $|-3{,}75| \cdot \left|-1\frac{1}{9}\right|$.

752 а) Сформулируй определение степени с натуральным показателем.
б) Прочитай выражения и вычисли их значения при $n = -0,5$:

$$(-2n)^6; \qquad (-2)n^6; \qquad (-2)^6 n.$$

753 Выполни действия:

а) $\left(-\frac{1}{5}\right)^3$; в) $(-0,5)^2 \cdot 0,04$; д) $-\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3$;

б) $(-0,1)^5$; г) $8,1 : \left(-1\frac{1}{2}\right)^3$; е) $-0,1 + (-0,1)^2 + (-0,1)^3$.

754 Какое свойство дроби используется при сокращении? Сократи дроби со знаменателями, отличными от нуля:

а) $\frac{18}{54}$; б) $\frac{96}{420}$; в) $\frac{2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7}$; г) $\frac{3mn}{12n^2}$; д) $\frac{10a^2bc}{45ab^3}$; е) $\frac{2x + x^2}{4x^2}$.

755 Найди значения выражений:

а) $-5\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{7} : (-1,8) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^2$; в) $\left(-\frac{9}{14} : \left(-5\frac{1}{7}\right) + 9,31 : (-24,5)\right) : (-0,5)^2 - 0,08$;

б) $\dfrac{-0,7 \cdot 0,06 \cdot (-1,2)}{0,024 \cdot (-\frac{1}{6}) \cdot 5,6}$; г) $\dfrac{(-2,75 \cdot 2\frac{2}{11} - 1\frac{7}{8} \cdot (-3,2)) : \left(2\frac{9}{40} - 0,275\right)}{2,47 : 0,26 - \left(-5\frac{3}{11} : 5\frac{3}{11}\right)^2}$.

756 Сформулируй и запиши в общем виде следующие свойства рациональных чисел: а) переместительное, сочетательное и распределительное свойства сложения и умножения; б) свойства числа 0 при сложении и вычитании; в) свойства чисел 0 и 1 при умножении и делении. Придумай примеры, в которых использование этих свойств упрощает вычисления.

757 Вычисли наиболее рациональным способом:

а) $11,9 \cdot 1\frac{5}{16} - 1\frac{5}{16} \cdot 3,9$; г) $-4,35 - 2\frac{1}{3} - 5,18 + 1\frac{7}{20} - 4\frac{2}{3} + 5,18$;

б) $-0,48 \cdot \frac{5}{7} - \frac{2}{7} \cdot 0,48$; д) $-12,5 \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) \cdot 0,8 \cdot (-2,5) \cdot 0,4 \cdot (-0,52)$;

в) $-1,6^2 + 1\frac{3}{5} \cdot 4,1$; е) $-3,7 \cdot \left(\frac{1}{8} - 0,125\right) \cdot \left(-5\frac{16}{49}\right) \cdot 34,02$.

758 Что называется отношением двух чисел? Прочитай и упрости отношения:

а) $\frac{1,21}{3,3}$; б) $\frac{2}{3} : \frac{4}{15}$; в) $0,7 : 2,1 : 2,8$; г) $1,05 : 4\frac{1}{3}$; д) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$.

759 а) Раздели число 700 в отношении $3\frac{1}{3} : 0,5 : \frac{5}{6}$.

б) Выполни действия и раздели полученное число в отношении $0,1 : 0,7$:

$$\frac{\left(-4\frac{3}{20} + 1\frac{5}{12} - \frac{4}{15}\right) \cdot 0,6 - 0,6}{1,6 - 1,6 \cdot 3\frac{1}{7}} - \frac{0,0032 : (-0,4)^3 + 0,07 \cdot 20}{(1,3 - 1,236 : 1,2) : (-0,03) \cdot \frac{1}{6}}.$$

760 Периметр треугольника ABC равен 16,8 см. Найди длины его сторон, если AB относится к BC как 7 : 5, а BC относится к AC как 3 : 4.

761 Сформулируй определение и основное свойство пропорции. Приведи примеры. Какие преобразования пропорций возможны?

762 а) Приведи примеры прямо и обратно пропорциональных величин. Сформулируй их определение и запиши формулы прямой и обратной пропорциональностей.

б) Построй на одной координатной плоскости графики зависимостей величин $y = 2x$ и $y = -2x$. Что ты замечаешь?

в) Построй на одной координатной плоскости графики зависимостей величин $y = \frac{12}{x}$ и $y = -\frac{12}{x}$. Что ты замечаешь?

763 а) На ипподроме лошадь, пробежав по кругу 8 раз, преодолевает 12,8 км. Сколько километров она преодолеет, пробежав по кругу 16 раз, 20 раз?

б) Две одинаковые трубы наполняют бассейн за 12 ч. За сколько времени наполнят бассейн 4 такие же трубы, 5 таких же труб?

в) Автомобиль может проехать расстояние между двумя городами, двигаясь со скоростью 80 км/ч, за 6 ч. На сколько он должен увеличить скорость, чтобы преодолеть это расстояние за 4 ч?

764 На карте, выполненной в масштабе 1 : 1 000 000, расстояние от Москвы до Орехово-Зуево равно 9 см. Чему оно равно в действительности? Каким отрезком изобразится это расстояние на карте масштабом 1 : 300 000?

765 Реши уравнения:

а) $\dfrac{5x+1,6}{2x-0,8} = \dfrac{3,9}{2,6}$; б) $\dfrac{2y-3}{4\frac{1}{6}} = \dfrac{0,8y+1\frac{1}{2}}{3,75}$; в) $2\frac{2}{3} : \left(3x + \frac{5}{7}\right) = 1\frac{1}{6} : \left(x - 1\frac{1}{4}\right)$.

766 Как найти: а) процент от числа; б) число по его проценту; в) процентное отношение двух чисел? Придумай и реши задачи на эти правила. Затем эти же задачи реши методом пропорций. Какой способ решения ты считаешь более удобным? Почему?

767 а) Сплав состоит из меди, цинка и свинца. Медь составляет 54% сплава, а цинк – 26% сплава. Сколько меди и цинка входит в сплав, содержащий 0,8 кг свинца?

б) Из 0,2 т винограда получается 64 кг изюма. Какой процент своей массы теряет виноград при сушке?

в) Морская вода содержит 5% соли. Сколько килограммов простой воды нужно добавить к 24 кг морской воды, чтобы процентное содержание соли в ней стало равно 2%?

768 Поезд прошел 25% всего пути, а потом 40% оставшегося расстояния. Сколько процентов всего пути ему еще осталось пройти?

769 При изготовлении сока из апельсинов 60% массы уходит в отходы. Что дешевле – купить апельсины по цене 60 р. за килограмм и сделать из них килограмм сока или купить свежий апельсиновый сок по цене 300 р. за килограмм? На сколько процентов дешевле?

770 Длина прямоугольника в 4 раза больше ширины. Длину прямоугольника уменьшили на 20%, а ширину увеличили на 20%. На сколько процентов изменились периметр и площадь прямоугольника?

771 Запиши выражение и найди его значение при данных значениях букв:
а) разность куба числа a и утроенного произведения квадрата числа b на число c $(a = -2;\ b = 0,5;\ c = -0,4)$;
б) квадрат суммы удвоенного числа x и частного чисел y и z $(x = -1,5;\ y = 1\frac{2}{3};\ z = -\frac{5}{6})$.

772 Назови коэффициенты и буквенные части выражений:
а) $-5ab$; б) $0,3x^2$; в) m^3n; г) $-y$; д) $-2b \cdot (-0,6c)$.

773 Раскрой скобки и приведи подобные слагаемые:
а) $2(7 - 3x) + 4x - 9$;
б) $a(y + 6) - y(a - 1) - 6a$;
в) $9m - 4(2m + n) + 2(-m + 3n)$;
г) $2a^2 - a(3a - b) - b(a - b)$.

774 Найди множество корней уравнения:
а) $2(3x + 4) = 20 - 6(2 - x)$;
б) $1,6x + 0,8 = -0,3(4 - 5x)$;
в) $7x - 4(2x + 3) = 4(x - 2) - 5(x + 4)$;
г) $2,4 + 4(-0,1x + 0,8) = 1,7x - 5(0,3x - 1)$.

775 В первый час мотоциклист проехал 20% всего пути, во второй час на 8 км больше, чем в первый, в третий – на 25% меньше, чем во второй, а в четвертый – остальные 49 км. Чему равен весь путь мотоциклиста?

776 Из города к озеру вышел турист со скоростью 5 км/ч, а через 15 мин вслед за ним выехал велосипедист со скоростью 20 км/ч. Через сколько минут после своего выезда велосипедист догнал туриста? На каком расстоянии от города находится озеро, если турист прибыл туда на 2 ч позже велосипедиста?

777 Прочитай высказывания и определи, истинны они или ложны. Что ты замечаешь? Какие высказывания равносильны?
а) $x = -5 \Rightarrow x^2 = 25$;
б) $x^2 = 25 \Rightarrow x = -5$;
в) $|x| = 5 \Rightarrow x^2 = 25$;
г) $x^2 = 25 \Rightarrow |x| = 5$.

778 Три маляра покрасили забор за a ч. Первый маляр, работая один, может покрасить этот забор за b ч, а второй – за c ч. За сколько времени покрасит этот забор третий маляр, если будет работать один?

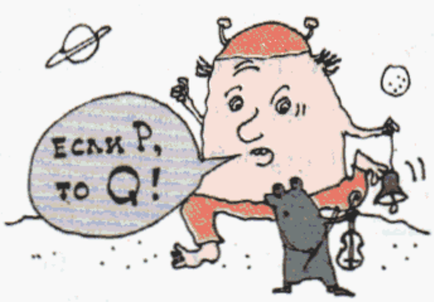
779 а) Реши уравнение методом *проб и ошибок*: $3x(x + 1)(x - 1) = 0$.
б) Реши уравнение методом *перебора*: $5x(x - 1)(6 - x) = 120$, где $x \in N$.

Когда люди разговаривают, они не только сообщают друг другу некоторую информацию, но и определенным образом обосновывают свое мнение. Это начинается с раннего детства, и когда мама предлагает сварить ребенку манную кашу, а он говорит: «Не надо, потому что я ее не люблю», то в его *потому что* уже содержится *логика*.

Ребенок рассуждает примерно следующим образом: «Я не люблю манную кашу, следовательно, я не буду ее есть. Никто не хочет работать напрасно, значит, и мама тоже. Но если она сварит кашу, то работа будет напрасной. Если человек работал напрасно, он огорчается. Я не хочу огорчать маму, поэтому и говорю «не надо».

Если же мама скажет, что манную кашу надо есть, чтобы быстрее расти, то за этим *«чтобы»* тоже скрывается логика: «Ребенок, который ест манную кашу, быстрее растет, а ты хочешь быстрее расти, *поэтому* ты должен ее есть».

Чем закончится диалог – неизвестно, но уже первые фразы показывают, что это *«уважительный* диалог», где мама не приказывает, ребенок не капризничает, но каждый из них объясняет, аргументирует свое поведение. А могло быть и так:



Мама: Я сварю тебе манную кашу.

Ребенок: Не хочу.

Мама: Нет, надо.

Какой диалог с мамой вы бы предпочли – логически обоснованный или командно-капризный?

Историки считают, что математика в Древней Греции зародилась с развитием демократии – политическом строе, где человека надо *убеждать*, в отличие от тирании – строе, где человеку достаточно *приказывать*. Но уважительный диалог возможен, когда люди придерживаются одних и тех же правил, и это прежде всего правила логики. Фактически правила логики усваиваются через язык с раннего возраста, но математика учит их применять более осознанно.

Общие правила логических рассуждений впервые описал один из величайших ученых в истории человечества – древнегреческий философ Аристотель. Это было примерно 2350 лет назад. Формулируя эти правила, Аристотель опирался на человеческую практику, на естественный язык. Если, например, известно, что:

1) *Все ученики 125-й школы изучают английский язык*,

2) *Сережа Марков учится в 125-й школе*,

то сразу можно догадаться, что Сережа Марков изучает английский язык. Это и есть *вывод*, *логическое следствие* из данных утверждений, а сами исходные утверждения в науке логике называются *посылами*.

А вот из посылов:

1) *Все ученики 125-й школы изучают английский язык*,

2) *Сережа Марков изучает английский язык*

нельзя сделать вывод, что Сережа Марков учится в 125-й школе, – ведь не только в этой школе изучают английский язык.

Аналогичные умозаключения можно выводить независимо от содержания высказываний. Например, из посылов:

1) *Все галбейны рыжие*,
2) *Вордик галбейн*
следует, что Вордик рыжий, а из посылов:
1) *Все галбейны рыжие*,
2) *Вордик рыжий*
не следует, что Вордик галбейн.

Казалось бы, весь этот пример – какая-то чепуха, поскольку речь в нем идет о несуществующих предметах. Но что изменится в рассуждениях, если *галбейнами* назвать породу собак, а Вордиком – одну из собак этой породы? Ровным счетом ничего. Значит, правила логического вывода зависят не от конкретных понятий, а от *логических связей* между ними, и именно поэтому их можно распространить на любую науку и любую сферу человеческой деятельности. Вспомним, например, как успешно применял правила логического вывода Шерлок Холмс.

Вместе с тем накопленных нами знаний пока не всегда хватало для безупречного использования правил логического вывода. Поэтому порой мы применяли так называемую *неполную индукцию* – переход от одного или нескольких примеров к общему выводу. Так нами были «доказаны» признаки делимости натуральных чисел, свойство биссектрис треугольника и др. Этот же путь прошла в своем развитии и сама наука математика: путь наблюдений, выявления различных закономерностей, выдвижения гипотез и поиска способов их доказательства.

Гениальным открытием в истории математики был *аксиоматический метод*. Александрийский геометр Евклид, живший в III веке до н. э., блестяще использовал этот метод, сведя вместе результаты, полученные многими поколениями ученых. В своей книге «Начала» он построил геометрию, в которой любое рассуждение строится как строгая последовательность логически обоснованных выводов. Эта *Евклидова* геометрия и составляет основу современного школьного курса геометрии, который вы начнете изучать в 7 классе.

Многие свойства фигур, которые вы будете рассматривать в курсе геометрии 7–9 классов, вам уже встречались, но лишь на уровне исследования и *выдвижения гипотез*. Следующий этап – доказательство или опровержение этих гипотез – поможет вам освоить новый метод логического обоснования общих утверждений – *дедукцию*.

Дедуктивный метод базируется на получении системы обоснованных выводов из согласованных утверждений (аксиом). Поэтому он используется не только в геометрии, но и во всех разделах математики, в том числе и в алгебре, которая также изучается в старших классах. И, несмотря на то что геометрия и алгебра имеют разные предметы исследования – геометрия изучает пространственные формы тел, а алгебра – количественные отношения, общим фундаментом алгебры и геометрии являются законы логики.

Мы желаем вам успехов на пути познания математических закономерностей окружающего мира и будем рады, если наша совместная работа поможет вам в этом.

Авторы

Глава 3. §3. **16.** а) $\frac{a+b+c}{3}$; в) $v_{\text{соб.}} = \frac{5d}{12}$; $v_{\text{теч.}} = \frac{d}{12}$. **20.** а) $a = -30$. **21.** 5. **25.** 50 коп. и 24 р. 50 коп. **26.** 2 : 1. **33.** б) −9. **37.** 12. **38.** в) $-0{,}8n^2$; г) $3y^3$. **39.** б) $-2a + 1$. **56.** б) 25%; г) $33\frac{1}{3}$ %; е) 60%. **57.** а) Ув. 100%; б) ув. 200%; в) ум. 75%; д) ум. 25% е) ув. 50%. **58.** г) $1{,}54n$ р.; д) $2{,}5k$ р. **60.** 80 р. **61.** а) 1,75; в) 15. **62.** в) $-x + 2$; г) $5y$. **63.** а) 9. **64.** в) Ув. на 25%. **65.** $\frac{2}{3}$. **66.** 0,02. **67.** в) 3. **68.** 2 полушки. **80.** а) −3. **81.** б) 14. **82.** б) Q; д) {4,5}; е) {−1; −5}. **83.** а) 12; −8. **84.** 2. **85.** 1480 фунтов. **105.** а) 8; б) 7,5; в) 1,5; г) 25. **106.** а) {−4}; г) {2}; е) {−9}; ж) Q. **108.** 24 л и 12 л. **109.** 840. **110.** 17,5 т. **113.** а) 2^{22}. **114.** 84. **135.** а) 3; б) 10,8; ж) $3c$. **137.** а) На 60%; б) на 150%. **141.** а) 7. **142.** в) $S = ab - 3c^2$. **149.** а) 105 марок. **150.** 500 т. **151.** 75 кг. **152.** 2,4 м². **153.** а) $\frac{5}{11}$; г) $\frac{x+y}{xy}$. **154.** 4 км/ч, 30 мин. **156.** а) 0,72. **158.** Да. **160.** 50. **161.** 2,52. **165.** б) 125 чисел. **166.** а) 48 чисел. **167.** 40 способов.

§4. **188.** б) −1, 0, 1, 2, 3. **190.** а) 66. **193.** а) 0,6; г) 5. **195.** а) 40 га; б) 5,4 км/ч. **199.** −6. **200.** Частное 3, остаток 8. **201.** б) $\frac{1}{3}$. **202.** б) 14 р. **203.** На 11%. **204.** −1,5. **205.** 6 мин. **207.** Делимое 665, делитель 9, частное 73. **217.** Например: а) $y = ax^2$; б) $y = ax + b$. **219.** в) $-\frac{5}{n}$; г) $-\frac{1}{5bm}$. **222.** 13,8 км. **224.** а) −4; 3,8; −10,4. **227.** г) $-\frac{c}{2}$. **228.** 2 км. **229.** 1.

§5. **236.** 0,2. **239.** а) $-9ab$; б) $2{,}8nxy$; д) a^3b^2; е) $-x^4yz^2$. **240.** 30, 24. **241.** а) −6; б) −3. **243.** 16 р. **244.** 7. **245.** $1\,010\,101_2 = 85$; $1212_3 = 50$; $3210_4 = 228$; $4040_5 = 520$; $20\,406_7 = 5004$; $1234_{12} = 2056$; $500_{56} = 15\,680$. **252.** а) {−1,5}; б) ∅. **253.** а) 315 см³; б) 107,2 дм². **255.** а) {−32}; б) {−2}. **256.** $V = 6{,}75$ дм³; $S = 14{,}4$ дм². **257.** $9 = 1001_2$, $25 = 11\,001_2$, $32 = 100\,000_2$, $75 = 1\,001\,011_2$, $100 = 1\,100\,100_2$. **267.** а) 0,2; г) $0{,}7a$; д) 2,7; е) 80; ж) 32; з) $2{,}5b$. **268.** в) $0{,}2d + 5$; г) $0{,}6x$. **269.** б) НОД = 7, НОК = 980; в) НОД = 16, НОК = 160; **272.** б) ∅; в) {0}. **273.** 226 т. **274.** 37,8 т. **278.** 25 000 р. **279.** 416 р. **282.** В 6-ричной с. с. **292.** а) 16 и 24; б) 16 и 9. **293.** а) 0,9. **302.** б) −2,3; г) −2,5; е) 126. **303.** а) {$-\frac{1}{3}$}; г) {0,6}. **304.** 25 мин 45 сек; на 20%. **307.** 350 и 450. **308.** −0,7. **309.** 400 м². **310.** в) −8. **311.** д) −0,3. **313.** 30 кг, 50 кг. **314.** На 1 деталь. **321.** 0,72. **322.** {5}. **323.** {10}.

Глава 4. §1. **340.** а) {6}; б) {−2}; в) {−0,4}. **342.** а) 6 м³. **346.** б) {15}; в) {−8}. **347.** 5. **348.** 180 км. **365.** г) $0{,}58b$; е) 70. **367.** б) $1{,}24a$; г) $2{,}5\,c$; д) $0{,}7x$. **368.** а) 24, 20, 32. **372.** 360, 400, 500. **374.** $A = 1{,}6$; $B = 4$; а) 40%; б) 250%. **390.** а) 3,6 дм. **392.** а) На 56%; г) ум. на 1%. **394.** а) Ув. на 20%; б) ум. на 15%. **398.** б) 49,5. **399.** а) −2,7. **400.** а) ∅; в) {2,45}. **402.** 3,6 см; 6 см; 7,4 см. **407.** На 25%. **408.** 9720 р. **409.** 81. **410.** а) ∅; б) Q. **412.** 48 см². **414.** На 25%. **427.** ж) 2,1 (36). **430.** б) 21 м/с и 147 м. **431.** 56 км. **435.** 26 км/ч. **436.** 1,8 км/ч. **442.** 25 м. **443.** 5 мин. **445.** 0,16.

§2. **463.** г) $\frac{4}{5cd^2}$; д) $\frac{y-z}{y+z}$; е) $\frac{a}{b}$; ж) $\frac{c}{d}$; з) $\frac{1}{a}$. **464.** 12 мин. **465.** Через 56 мин. **467.** 15 ч. **468.** б) 18 ч; 14 ч 24 мин. **471.** д) $\frac{b+1}{b-1}$. **472.** 15 дн. **476.** Две первые овцы. **497.** б) 30 мин. **498.** а) 1,25; в) −4,5. **503.** а) 1,9; б) $-1\frac{5}{6}$. **504.** а) 216 дн. **522.** A – 60 000 акций, B – 100 000 акций, C – 140 000 акций. **523.** 2000 р., 1500 р., 1200 р. **524.** в) ≈ 20,5. **527.** а) $\frac{2m}{75}$; в) $-3{,}5y$. **531.** Математика – 30 мин, русский язык – 30 мин, французский язык – 45 мин, биология – 15 мин. **533.** $a = 7$, $b = 25$; 14 и 50.

§3. **557.** а) 7; б) 3. **558.** а) −10; г) −1,75. **561.** б) 12 км 12 м; г) 9,2 см³. **562.** На 40%. **566.** а) ≈ 64 см²; б) ≈ 0,80 м. **567.** а) $\frac{5}{16}$; г) 8. **590.** а) 1,2; в) $\frac{2}{3}$. **595.** а) {−2}. **599.** в) $\angle AOM = 30°$, $\angle MOB = 60°$; г) $\angle MOB = 36°$, $\angle AOM = 54°$. **601.** 45°, 15°, 120°. **604.** а) ∅; б) {0,6}. **605.** 6 и 4,8.

§4. **625.** а) {2,5; −2,5}; в) {−5}; д) ∅; ж) {2; $\frac{2}{3}$}. **631.** 40 и 8 монет. **632.** а) $\frac{5}{27}$; б) $-\frac{7}{27}$; д) −0,091; е) −0,109. **663.** а) 1; г) −1. **664.** б) $\frac{17}{18}$. **666.** б) {−36}; в) {3,2}; г) {$\frac{5}{6}$}. **667.** 24 км/ч. **669.** 80 км/ч. **671.** а) 0,8; в) $\frac{5}{16}$. **677.** б) {−1,6}; в) −2,5. **678.** 10 км/ч. **679.** 5 км. **680.** 4 км. **681.** 0,08. **698.** б) 10,5 и 6,3. **699.** 180 мм. **701.** в) 0,2; г) 16. **702.** а) {−0,5}; б) {1; −5}; в) ∅. **705.** На 20%. **707.** а) {$-1\frac{1}{3}$; 4}; б) {2}. **708.** в) $-\frac{1}{6}$. **716.** б) 6000. **717.** 32 км/ч. **726.** б) {−6,8}; в) ∅; г) Q. **727.** 8 км. **728.** $3\frac{1}{3}$ ч. **730.** а) 0,10(6); б) 6,(1). **735.** а) {1,56}; в) ∅. **739.** б) 0,52 м²; в) 10,8 м³. **755.** в) −1,1; г) 0. **759.** а) 500; 75; 125; б) 0,2; 1,4. **760.** 6,3 см; 4,5 см; 6 см. **763.** б) 6 ч, 4 ч 48 мин. **765.** в) {−5}. **767.** а) Медь – 2,16 кг, цинк – 1,04 кг. **768.** 45%. **770.** Периметр уменьшился на 12%, площадь уменьшилась на 4%. **775.** 140 км. **778.** $\frac{1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}}$ или $\frac{abc}{bc - ac - ab}$. **779.** а) {0; −1; 1}; б) {4}.

ТАБЛИЦА ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ (до 1000)

2	3	5	7	11	13	17	19
23	29	31	37	41	43	47	53
59	61	67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113	127	131
137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223
227	229	233	239	241	251	257	263
269	271	277	281	283	293	307	311
313	317	331	337	347	349	353	359
367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457
461	463	467	479	487	491	499	503
509	521	523	541	547	557	563	569
571	577	587	593	599	601	607	613
617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719
727	733	739	743	751	757	761	769
773	787	797	809	811	821	823	827
829	839	853	857	859	863	877	881
883	887	907	911	919	929	937	941
947	953	967	971	977	983	991	997

Дорофеев Георгий Владимирович
Петерсон Людмила Георгиевна

Математика 6 класс. Часть 3

Ответственный за выпуск *Ю. И. Веслинский*
Научный редактор *Д. Л. Абраров*
Художник *С. Ю. Гаврилова*
Технический редактор *Е. В. Бегунова*
Компьютерная верстка *Р. Ю. Шаповалов, А. В. Каляева*
Корректоры *О. Б. Андрюхина, И. Н. Павлова, Н. В. Лин, О. И. Козлова, Н. А. Хромова*

Подписано в печать 18.12.2009. Формат 84x108/16. Объем 11,0 п. л. Усл. печ. л. 18,48.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Школьная.
Тираж 145 001—190 000 экз. (4-й завод). Заказ № 24370 (K-Sm).

Издательство «Ювента» (структурное подразделение ООО «С-инфо»)
125284, Москва, а/я 42 **Тел.:** (495) 796-92-93 **Факс:** (495) 796-92-99
E-mail: booksale@si.ru **Адрес в Интернете:** www.books.si.ru

Приобрести книги можно в магазине по адресу:
Москва, ул. 1905 года, д. 10 А. **Телефон:** (495) 253-93-23
Часы работы: с 10 до 19 часов. **Выходные:** воскресенье, понедельник

Отпечатано в ОАО «Смоленский полиграфический комбинат».
214020, г. Смоленск, ул. Смольянинова, 1.